



॥ हिन्दी बीज गणित ॥

No: 14

Gentia

दूसरा भाग

जिसको



पश्चिमोत्तरीय जिलों की पाठशालाओं के विद्यार्थियों के लिये परिचित मोहनलाल ने अंग्रेजी से

हिन्दी भाषा में उलथा किया

अवध देश के डूरेकर आक्रा पब्लिक

इन्स्ट्रक्शन आर्गुत विलियम डैल्ड फोर्ड साहिब बहा

दुर के रुकम से

स्थान लखनऊ

मसबुत मुन्शी नवल किशोर में छापा गया

सन १८८५ ई०

॥ हिन्दी बीज गणित के दूसरे भाग का सूचीपत्र ॥

आशय	पृष्ठ	पंक्ति
देवर्ण एक घात समीकरण जिसमें दो दो		
अवक्त राशि मिली हों	१	३
क्रिया समेत देवर्ण एक घात संबंधी प्रश्न	१३	२५
परीक्षा के लिये देवर्ण एक घात संबंधी प्रश्न	२२	२४
घात क्रिया	२५	१३
क्रिया समेत घात क्रिया संबंधी प्रश्न	२८	८
परीक्षा के लिये घात क्रिया संबंधी प्रश्न	३०	४
मूल क्रिया	३०	२०
क्रिया समेत मूल क्रिया संबंधी प्रश्न	३१	१५
परीक्षा के लिये मूल क्रिया संबंधी प्रश्न	३७	५
वर्ग समीकरण	३७	२०
क्रिया समेत वर्ग समीकरण संबंधी प्रश्न	३८	२१
परीक्षा के लिये वर्ग समीकरण संबंधी प्रश्न	४०	६
संबन्ध १ अनुपात २ ध्रुव राशि ३ चल राशि ४ ..	६५	११
योगज श्रेढी और अन्तर श्रेढी	७६	१६
गुणोत्तर श्रेढी	८८	८
क्रिया सहित श्रेढी संबंधी प्रश्न	८८	६
परीक्षा के लिये श्रेढी संबंधी प्रश्न	९५	११

॥ हिन्दी बीजगणित ॥

॥ दूसरा भाग ॥

॥ दो वर्ण एक घात समीकरण ॥



५५ प्र० जो केवल एक समीकरण में दो अव्यक्त राशि य और र हों जैसे $२य + ३र = २०$ तो पक्षान्तरानयन से $२य = २० - ३र$ और २ का भाग देने से $य = १० - \frac{३र}{२}$ परन्तु इस समीकरण में य का मान व्यक्त नहीं है कारण यह है कि उसके मान के एक पद में र अव्यक्त राशि मिली है इसलिये जो एक और समीकरण हो जैसा $३य + २र = २५$ और उसमें य और र राशियों के मान जो पूर्व समीकरण में हों रखने से उस समीकरण की समता बनी रहे तो

$$\therefore ३य + २र = २५$$

$$\therefore \text{पक्षान्तरानयन से } ३य = २५ - २र$$

$$३ \text{ का भाग देने से } य = \frac{२५}{३} - \frac{२र}{३}$$

और पूर्व समीकरण में य का मान $१० - \frac{३र}{२}$ निकाला है और दोनों समीकरण में य का एक ही मान कल्पना किया है इस कारण दोनों मान य राशि के तुल्य हैं वा $१० - \frac{३र}{२} = \frac{२५}{३} - \frac{२र}{३}$

इस समीकरण में केवल एक ही य राशि अव्यक्त है समीकरण के दोनों पक्षों की राशियों को 2×3 व ई से गुणा किया तो $६० - ६० = ५० - ४२$

पक्षान्तरान्तरण से $६० - ५० = ६० - ४२$

योग करने से $१० = ५२$

५ का भाग देने से $२ = १०$ व २

और पहले समीकरण में $y = १० - \frac{३२}{२}$ इसमें २ का मान रखने से $y = १० - \frac{६४}{२} = १० - ३२ = २२$

इसलिये $२y + ३x = २०$ और $३y + २x = २५$ इन दोनों समीकरणों में $y = २२$ और $x = २$ इन मानों को दोनों समीकरणों में y और x राशियों के स्थान में रखने से उनकी समता बनी रहेगी जैसे पहले समीकरण में

$२ \times २२ + ३ \times २ = २०$ और दूसरे समीकरण में $३ \times २२ + २ \times २ = २५$

जो दो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के एक से मान हों तो उनको समानमिति वर्ण समीकरण कहेंगे और दोनों समीकरणों को नीचे ऊपर लिख कर उनके दाहिनी ओर } ऐसा कोष्ट कर देंगे हैं और जो दो समीकरणों से एक ऐसा समीकरण बनाते हैं कि उस में केवल एक अव्यक्त राशि रह जाती है तो जिस क्रिया से दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाती है उसे एक वर्ण शोधन कहते हैं और जैसे पूर्व दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से y और x दोनों अव्यक्त राशियों के मान निकल आये हैं वैसे ही सरूप के जो कोई और दो समीकरण हों और उनमें प्रत्येक समीकरण की समता अव्यक्त राशियों के एक से मान रखने से बनी रहे तो एक वर्ण

शोधन से दोनों अव्यक्त राशियों का मान निकाल आयेगा
परन्तु एक वर्ण शोधन की सुगम रीति बतलाते हैं। जैसे

॥ उदाहरण ॥

$$(१) \quad २य + ३र = २० \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{इष्ट समीकरण हैं} \\ \text{और } २य - ३र = ८ \end{array} \right.$$

तो तुल्य राशियों का योग करने में

$$४य = २८ \therefore ४ \text{ का भाग देने से } य = \frac{२८}{४} = ७$$

ऐसे ही तुल्य राशियों का अन्तर करने से

$$६र = १२ \therefore ६ \text{ का भाग देने से } र = \frac{१२}{६} = २$$

$$(२) \quad २य + १र = १६ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{इष्ट समीकरण हैं इनमें } य \\ ३य + २र = २५ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{और } १ \text{ राशियों का मान बनाने} \\ \text{पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा तो} \end{array} \right.$$

$$४य + २र = ३२ \quad \text{इसके नीचे दूसरे समीकरण को लिखा}$$

$$३य + २र = २५$$

अन्तर करने से $य = ७$ और पहले समीकरण में पक्षान्तर
नयन से

$$र = १६ - २य$$

$$= १६ - २ \times ७$$

$$= १६ - १४$$

$$= २$$

$$(३) \quad २य + ३र = २० \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{समीकरण हैं इनमें } य \text{ और } \\ ३य + २र = २५ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{१ राशियों का मान बताने} \\ \text{पहले समीकरण के प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो} \end{array} \right.$$

$$४य + ६र = ४० \quad \text{दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को ३}$$

से गुणा करो तो $६य + ६र = ७५$ इस समीकरण में से ऊपर
के समीकरण को घटाया तो $५य = ३५$

इसलिये ५ का भाग देने से $y = \frac{35}{5} = 7$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरा नयन से

$$2x = 25 - 3y = 25 - 3 \times 7 = 25 - 21 = 4$$

इसलिये २ का भाग देने से $x = \frac{4}{2} = 2$

जिस रूप के ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं वैसे ही रूप के और जो दो भिन्न समीकरण हों वा ऐसे दो समीकरण हों कि जो उनपर पूर्व रीतियों से क्रिया करें तो उन के रूप ऊपर के उदाहरणों के समीकरणों के रूप के सम हो जाय तो जिन रीतियों से पूर्व उदाहरण के समीकरणों में y और x अव्यक्त राशियों का मान मिल गया है उन्हीं रीतों से इष्ट दो समीकरण में अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा उन रीतियों का यही आशय है कि इष्ट दो समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना चाहिये जिसमें केवल एक राशि अव्यक्त रह जाय और दूसरी अव्यक्त राशि मिट जाय इसके लिये रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

देखो कि दोनों समीकरण में किस अव्यक्त राशि के गुण छोटे हैं और जो y राशि के गुण छोटे हों तो y राशि का गुण जो एक समीकरण में हो उस से दूसरे समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो और ऐसे ही जो x राशि का गुण दूसरे समीकरण में हो उससे पहले समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो फिर देखो कि इस क्रिया करने से जो दो नये समीकरण उत्पन्न हों उन का योग वा अन्तर करने से y राशि मिट जायगी और

एक ऐसा समीकरण रह जायगा कि उसमें केवल एक
व्यक्त राशि रहेगी और जो राशि के गुण छोटे हों तो प
र्व क्रिया से राशि को शोधन करो और जिस अव्यक्त राशि
के गुण छोटे होते हैं उनसे देने में समीकरण को स्थिर
गुणते हैं इसका यह कारण है कि इस रीति से थोड़ा गुणा क
रना पड़ता है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$\left. \begin{array}{l} (१) २य + १६र = ४८ \\ और ५य - १३र = ६७ \end{array} \right\} \text{तो य और र का मान व०}$$

पहले समीकरण प्रत्येक पद को ५ से गुणा करो और दूसरे समीकरण प्रत्येक पद को २ से गुणा करो तो

$$१०य + ८०र = २४०$$

$$और १०य - २६र = १३४$$

$$\text{अन्तर करने से } १०६र = १०६$$

$$\therefore र = १$$

और पहले समीकरण में पश्चात्तरानयन से

$$२य = ४८ - १६य = ४८ - १६ \times १ = ४८ - १६ = ३२$$

$$२का भाग देने से य = १६$$

य और र अव्यक्त राशियों के मानों की सत्यता देखने के
लिये उन्हें पूर्व समीकरणों में रक्वा तो

$$२य + १६र = २ \times १६ + १६ \times १ = ३२ + १६ = ४८$$

$$और ५य - १३र = ५ \times १६ - १३ \times १ = ८० - १३ = ६७$$

$$(२) ७य - ८र = ३ \left\} \text{तो य और र का मान बताओ}$$

$$और १३य + ५र = ८५$$

इन समीकरणों में राशि के गुण छोटे हैं इसलिये प

हले समीकरण को दूसरे समीकरण की र राशि को गुण
 ५ से गुना और दूसरे समीकरण को पहले समीकरण की
 र राशि के गुण ८ से गुना तो

$$३५य - ४०र = १५$$

$$\text{और } १०४ य + ४०र = ६८०$$

$$\text{योग करने से } १३९य = ६९५$$

$$१३९ का भाग देने से य = \frac{६९५}{१३९} = ५$$

$$\text{और पहले समीकरण में } ८र = ७य - ३$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } = ७ \times ५ - ३$$

$$= ३५ - ३$$

$$= ३२$$

$$\text{इसलिये } ८ का भाग देने से र = \frac{३२}{८} = ४$$

य और र अव्यक्त राशियों के मान जो निकले हैं उनकी
 सत्यता देखने के लिये परीक्षा करते हैं ॥

$$७य - ८र = ७ \times ५ - ८ \times ४ = ३५ - ३२ = ३$$

$$\text{और } १३य + ५र = १३ \times ५ + ५ \times ४ = ६५ + २० = ८५$$

जो समीकरणों में अव्यक्त राशियों के गुण बड़े अंक हों
 तो अव्यक्त राशियों के मान सुगम रीति से निकालना
 बनता है ॥ जैसे

॥ उदाहरण ॥

$$(१) \left. \begin{aligned} १६य + २३र &= ९७ \\ \text{और } १४य - १२र &= १८ \end{aligned} \right\} \text{ तो य और र का मा}$$

न बताओ
 १६ और १४ का ११२ लघु समापवर्त्य है और इसमें १६ पूरा
 ७ बार जाता है और १४ पूरा ८ बार जाता है तो पहले समी
 करण को ७ से गुणा और दूसरे समीकरण को ८ से गुणा

$$\text{इसलिये } ११२य + २६१र = ६५८$$

$$११२य - २६१र = १४४$$

अन्तर करनेसे

$$२५७र = ५१४$$

२५७ का भाग देनेसे

$$र = \frac{५१४}{२५७} = २$$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$$१४य = १२र + १८ = १२ \times २ + १८ = २४ + १८ = ४२$$

$$१४ का भाग देनेसे य = \frac{४२}{१४} = ३$$

(२) $५४य - १२१र = १५$ } य और र का सा
 $और ३६य - ७७र = २२$ } न बताओ

५४ और ३६ का २१६ लघु समापवर्त्य है और इसमें

५४ का पूरा ४ बार भाग लगता है और ३६ का पूरा ६

बार भाग लगता है इसलिये पहले समीकरण को ४ से

गुणा किया और दूसरे समीकरण को ६ से गुणा किया तो

$$२१६य - ४८४र = ६०$$

$$२१६य - ४६२र = १२६$$

अन्तर करनेसे $२२र = ६६$

२२ का भाग देनेसे

$$र = \frac{६६}{२२} = ३$$

और दूसरे समीकरण में पक्षांतरानयन से

$$३६य = २१ + ७७र = २१ + ७७ \times ३ = २१ + २३१ = २५२$$

$$३६ का भाग देनेसे य = \frac{२५२}{३६} = ७$$

॥ प्रश्न १॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र का मान बताओ

$$\left. \begin{array}{l} (१) \text{ य} + \text{र} = १७ \\ \text{२य} - \text{र} = १६ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (२) \text{ ४य} - ७र = २६ \\ \text{४य} + ५र = ५० \end{array} \right\}$$

- | | | | |
|------------------------|---|------------------------|---|
| (३) $५य + २र = ३२$ | } | (४) $३य - ७र = २$ | } |
| $३य - २र = १४$ | | $११र - ३य = २$ | |
| (५) $३य + ४र = १९$ | } | (६) $१३य - ६र = ३९$ | } |
| $१५य - २र = १९$ | | $११य - ३र = ४७$ | |
| (७) $७य - ६र = १०$ | } | (८) $३५य + २र = ७६$ | } |
| $६य - ७र = ३$ | | $१२र - य = ३४$ | |
| (९) $५य + २र = १६$ | } | (१०) $११य - ७र = ७२$ | } |
| $६र + २य = ३१$ | | $७य - ११र = ०$ | |
| (११) $३६य - ४५र = ०$ | } | (१२) $६य + ५र = ६५$ | } |
| $२य + ५र = १३$ | | $७य - २३र = २५$ | |
| (१३) $१५य - २र = १४३$ | } | (१४) $११य - १३र = १६$ | } |
| $३५र + य = २५५$ | | $२०य - १६र = ४३$ | |
| (१५) $४५य + ८र = ३५०$ | } | (१६) $१०१य - २४र = ६३$ | } |
| $२१र - १३य = १३२$ | | $१७३य + २८र = २६$ | |
| (१७) $६४य + ६०र = २३७$ | } | (१८) $३३य - ४३र = १२$ | } |
| $६३य - २१८र = ८०$ | | $७य + ६र = ६०$ | |
| (१९) $२४य + ३३र = ४८$ | } | (२०) $४६य - ३३र = ६$ | } |
| $४१य + १०र = १२६$ | | $३य - ६र = २$ | |

५६ प० जिन समीकरणों में अव्यक्त राशिका मान निकालना हो तो जो रूप कि पूर्व उदाहरणों में समीकरणों कालिखा है उसके समान रूप दृष्ट समीकरणों का करलो । जैसे

॥ उदाहरण ॥

$$\left. \begin{aligned} (१) \quad २(य+२) &= ३(य-२)+१० \\ \text{और } २य-२ &= ४(२र-य)+३ \end{aligned} \right\} \text{य और र का मान बताओ}$$

पहले समीकरण में गुणा करने के पीछे को हट कर ले

$$२य + २र = ३य - ३र + १०$$

पक्षान्तरानयन से $५र - य = १०$ यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दूसरे समीकरण में कोष्ट हटाने से

$$३य - र = ८र - ४य + ३$$

पक्षान्तरानयन से $६य - ९र = ३$

३का भाग देने से $२य - ३र = १$ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

इसलिये दोनों लघुतम रूप समीकरणों को लिखा तो

$$५र - य = १०$$

$$\text{और } २य - ३र = १$$

इन में पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो

$$१०र - २य = २०$$

और दूसरे समीकरण को रक्खा $२य - ३र = १$

$$\text{योग करने से } ७र = २१$$

$$७का भाग देने से $र = \frac{२१}{७} = ३$$$

और पहले लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$य = ५र - १० = ५ \times ३ - १० = १५ - १० = ५$$

$$(१) \left. \begin{aligned} \frac{२य - र + ६}{३} &= \frac{३र - य + ६}{२} \\ \text{और } \frac{३य + र}{५} + १ &= \frac{३र + य + १३}{१०} \end{aligned} \right\} \text{य और र का मान बताओ}$$

चेद गम के अर्थ पहले समीकरण को ६ से गुणा करो

$$\text{तो } ४य - २र + ३६ = ६र - ३य + २७$$

पक्षान्तरानयन से $४य + ३य - २र - ६र = २७ - ३६$

योग करने से $७य - ८२ = -६$ यह पहले समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

छेद गम के अर्थ दूसरे समीकरण को १० से गुणा करो तो

$$६य + २२ + १० = ३२ + य + १३$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $५य - २ = ३$ यह दूसरे समीकरण का लघुतम रूप हुआ ॥

दोनों लघुतम रूप समीकरणों को एक स्थान में इकट्ठा रक्का

$$\left. \begin{array}{l} ७य - ८२ = -६ \\ \text{और } ५य - २ = ३ \end{array} \right\}$$

इन में पिछले समीकरण को ८ से गुणा तो

$$४०य - ८२ = २४$$

और पहले समीकरण को रक्का

$$७य - ८२ = -६$$

$$\text{अन्तर करने से } ३३य = ३३$$

$$३३ \text{ का भाग देने से } य = \frac{३३}{३३} = १$$

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$२ = ५य - ३ = ५ \times १ - ३ = ५ - ३ = २$$

$$\frac{३य - ५२}{२} + ३ = \frac{२य + २}{५}$$

$$\text{और } ८ - \frac{य - २२}{४} = \frac{य}{२} + \frac{२}{३}$$

य और २ का मान बताने

छेद गम के लिये पहले समीकरण को १० से गुणा किया तो

$$१५य - २५२ + ३० = ४य + २२$$

पक्षांतरा नयन और योग करनेसे

११ य - २७ र = - ३० प्रथम लघुतम रूप समीकरण हुआ

वेदगम के लिये दूसरे समीकरण को १२ से गुणा किया तो

४६ - ३ + ६ र = ६ + ४ र पक्षान्तरा नयन और योग कर

ने से ४६ = ४ - २ र दूसरा लघुतम रूप समीकरण हुआ

॥

प्रथम लघुतम रूप समीकरण को ४ से गुणा किया तो

$$४६ य - २४३ र = - २७०$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण को ११ से गुणा किया तो

$$४६ य - २२ र = १०५६$$

$$\text{अन्तर करनेसे } २२१ र = १३२६$$

२२१ का भाग देनेसे

$$र = \frac{१३२६}{२२१} = ६$$

दूसरे लघुतम रूप समीकरण में पक्षान्तरा नयनसे

$$४ य = ४६ + २ र = ४६ + २ \times ६ = ४६ + १२ = १०८$$

४ का भाग देनेसे

$$य = \frac{१०८}{४} = २७$$

॥ १ अभ्यास के लिये उदाहरण ॥

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें य और र अव्यक्तरा

शियों का मान निकालो

$$\left. \begin{aligned} (१) \quad ३(४ य - ५ र) &= २ (य + र) + ३ \\ ४(३ य - २ र) &= ५ (य - र) + ११ \end{aligned} \right\}$$

$$३ य + \frac{३}{३} = ३६$$

$$(२) \quad \frac{६ र - २ य}{४} = ८$$

$$(3) \quad \frac{२य-२र}{२} - ३ = \frac{२य-२}{४}$$

$$\frac{५य-४र}{२} - ३ = \frac{४य-३र}{३}$$

$$(४) \quad \frac{२य-३}{२} + २ = ७$$

$$५य-१३र = ३३ \frac{१}{२}$$

$$(५) \quad \frac{य+३}{२} = \frac{१}{३}$$

$$\frac{य}{२-१} = \frac{१}{५}$$

$$(६) \quad \frac{य}{६} + \frac{२}{६} = ४२$$

$$\frac{य}{६} + \frac{२}{६} = ४३$$

$$\frac{य}{६} + \frac{२}{१२} = २६$$

$$(७) \quad \frac{य}{२} - \frac{२}{७} = ४६$$

$$(८) \quad \frac{१}{२}(य+२) = \frac{१}{३}(२य+४)$$

$$\frac{१}{३}(य-२) = \frac{१}{२}(य-२४)$$

$$(८) \quad \frac{१}{७}(य+२) + \frac{१}{४}(२-य) = २य-८$$

$$\frac{१}{३}(२२-३य) + \frac{१}{५}(२य+६२-४)३य+४$$

$$(१०) \quad \frac{१}{३}(३य-३२) = \frac{१}{५}(२य+२+२)$$

$$८ - \frac{१}{५}(य-२) = ६$$

$$(११) \quad \frac{य-२}{५} - \frac{१०-य}{३} = \frac{२-२०}{४}$$

$$\frac{२२+४}{३} - \frac{२य+२}{८} = \frac{य+१३}{४}$$

$$(१२) \quad \frac{३य+२}{४} + \frac{७२+६य+२१}{१८} = \frac{२१}{९} - \frac{५य-१७}{६}$$

$$\frac{३}{७}(५य+३२+२) = \frac{३}{२} - (६२+६)$$

॥ दो वर्गाएँ एक घात समीकरण सम्बन्धीय हैं।
 (१) दो संख्याओं का योग २१ है और जो बड़ी संख्या
 के आधे में छोटी संख्या का तृतीयांश जोड़ा जाय तो
 योग ११ के तुल्य होता है तो बतलाओ कि वे कौनसी
 २ संख्या हैं ॥

कल्पना करो कि य और २ इष्ट राशि हैं तो प्र
 म के अनुसार $य + २ = २१$ और कल्पना करो
 य राशि बड़ी है तो इसका आधा है दुगुणा और २
 सरी राशि का तृतीयांश है दुगुणा इस लिये प्रम के

$$\text{अनुसार } \frac{य}{३} + \frac{२}{३} = १२$$

$$\left. \begin{array}{l} य + २ = २६ \\ \text{तो } \frac{य}{३} + \frac{२}{३} = १२ \end{array} \right\}$$

इन दो समीकरणों से य और २ अव्यक्त राशियों का मान निकालने से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

दूसरे समीकरण को ६ से गुणा करो तो $३य + २२ = ६६$
पहले समीकरण को २ से गुणा करो तो $२य + २२ = ५२$

$$\text{अंतर करने से } य = १४$$

और पहले समीकरण में पक्षान्तरा नयन से
 $२ = २६ - य = २६ - १४ = १२$ इसलिये १४ और १२
दृष्ट संख्या हुई

इन की सत्यता दिखाने हैं $१४ + १२ = २६$

$$\frac{१४}{२} + \frac{१२}{३} = ७ + ४ = ११$$

इस प्रश्न के उत्तर निकालने में य और २ दो अव्यक्त राशियों से दो समीकरण बनाने की कुछ आवश्यकता नहीं है केवल एक वर्ण समीकरण के एक चक्र करण से प्रश्न का उत्तर निकल आवेगा ॥

कल्पना करो कि दृष्ट संख्याओं में य संख्या बड़ी है तो प्रश्न के अनुसार २६—य दूसरी संख्या होगी और $\frac{य}{३}$ बड़ी राशि का आधा हुआ और $\frac{२}{३}$ यह छोटी राशि का तृतीयांश हुआ इसलिये प्रश्न के अनुसार $\frac{य}{३} + \frac{२}{३} = ११$ यह एक घात एक वर्ण समीकरण है ॥

६ से गुणा किया तो $3य + ५२ - २५ = ६६$
 पक्षान्तरानयन और योग करने से $य = २४$ यह संख्या हुई
 और $२६ - २४ = २२$ यह दूसरी संख्या हुई

(२) मेरे पास आने और पाइयां मिलकर १॥-) के स
 मान हैं और जो मेरे पास जितने आने हैं उतनी पाइयां
 होतीं और जितनी मेरे पास पाइयां हैं उनसे आने होते तो
 मेरे पास आने और पाइयां मिलकर ॥=) के समान होते
 तो बतलाओ कि मेरे पास कितने आने हैं और कितनी
 पाइयां ॥

कल्पना करो कि य आने की संख्या है
 और पाइयां की संख्या है
 तो य आने = १२ य पाइयां
 और १॥-) = ३०० पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार $१२य + र = ३००$ प्रथम समीकरण
 र आने = १२ र पाइयां
 ॥=) = १६८ पाइयां

इस लिये प्रश्न के अनुसार $१३र + य = १६८$
 प्रथम समीकरण को १२ से गुणा किया तो $१४४र + १२य = २०१६$
 इस समीकरण में से इस के ऊपर जो समीकरण लिखा है
 उसे घटाया तो

$१४३य = ३४३२$
 १४३ का भाग देने से $य = २४$
 = २४ यह आने की
 संख्या हुई

और प्रथम समीकरण में पक्षान्तरानयन

से र = $३०० - १२य = ३०० - १२ \times २४$

$$= ३०० - २८८ = १२ यह$$

पाइयों की संख्या हुई॥

अब देखो कि अव्यक्त राशियों का मान ठीक रहे वानहीं

क्योंकि १२ पाइयां = १ आना

और २४ आने = १ रुपया और ८ आने

इस लिये सर्व धन = १ रुपया और ८ आने

और २४ पाइयां = २ आने

और १२ आने = १२ आने

इस लिये दोनों मिलकर = १४ आने

(३) ७ वर्ष आगे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से ४ गुनी थी परंतु ७ वर्ष उपरान्त पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से दूनी रह जायगी तो बतलाओ कि हाल में हर एक मनुष्य की क्या अवस्था है ॥

कल्पना करो कि य लड़के की अवस्था है ॥

और बाप की अवस्था है

तोय-७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पहले

र-७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पहले

य+७ = लड़के की अवस्था ७ वर्ष पीछे

र+७ = बाप की अवस्था ७ वर्ष पीछे

प्रश्न के अनुसार र-७ = ४ य-७ } इन समीकरणों से य और

और र+७ = २ य+७ } र का मान निकालो

कोष्ठ को दूर करने से र-७ = ४ य-२८

और र+७ = २ य+१४

अन्तर करने से -१४ = २ य-४२

पक्षान्तर गणन से २ य = ४२-१४ = २८

२ का भाग देने से $y = \frac{35}{2} = 17.5$ यह लड़के की अवस्था है और पहले समीकरण में यक्षान्तनयन से
 $x = 7 + 8(y - 7) = 7 + 8(17.5 - 7) = 7 + 8 \times 10 = 7 + 80 = 87$ इस लिये 87 वर्ष की अवस्था वाप की हुई
 (४) मेरे पास दुपट्टे में रुपये और चौ गन्नियां बंधी हैं और जितने मेरे पास रुपये हैं उन से जो दूने मेरे पास रुपये होते और जितनी चौ गन्नियां हैं उन से आधी चौ गन्नियां होती तो मेरे पास $24\frac{1}{2}$ रुपये सर्व धन होता परंतु जितने मेरे पास रुपये हैं उन से आधे रुपये होते और जितनी चौ गन्नियां हैं उन से दो गुनी चौ गन्नियां होती तो मेरे पास ७ सर्व धन होता तो बतलाओ कि मेरे पास कितने रुपये हैं और कितनी चौ गन्नियां।

कल्पना करो कि मेरे पास y रुपये हैं और x चौ गन्नियां हैं

तो $2y$ रुपये $= 8 \times 2y$ चौ गन्नियां

$= 16y$ चौ गन्नियां

और $\frac{x}{2}$ चौ गन्नियां $= \frac{x}{2}$ चौ गन्नियां

और $24\frac{1}{2}$ रुपये $= 8 \times 24\frac{1}{2}$ चौ गन्नियां

$= 196$ चौ गन्नियां

इस लिये प्रश्न के अनुसार $16y + \frac{x}{2} = 196$

इसे गुणा करने से $32y + x = 392$ प्रथम समीकरण

$\frac{x}{2}$ रुपये $= 8 \times \frac{x}{2}$ चौ गन्नियां $= 4x$ चौ गन्नियां

और 22 चौ गन्नियां $= 22$ चौ गन्नियां

और ७ रुपये $= 8 \times 7$ या 56 चौ गन्नियां

इस प्रश्न के अनुसार $32y + 22 = 56$ ॥

२ का भाग देने से $y + r = १४$ दूसरा समीकरण
और प्रथम समीकरण में $१६ y + r = १६४$

खतर करने से $१५ y = १५०$

१५ का भाग देने से $y = १०$ $= १२$ यह रूपों की संख्या है

और दूसरे समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$r = १४ - y = १४ - १२ = २$ यह दोनों चिन्तियों की संख्या है ॥

(५) एक कुंजड़ने सन्तरे मोल लिये और उन के जबदा
म चुकाये तो उसने बराबर रुपये और बराबर आने दिये
और जितने रुपये और जितने आने दिये उन दोनों संख्या
ओं के योग के समान कोड़ी सन्तरे खरीदे तो बतलाओ कि
एक कोड़ी सन्तरे के क्या दाम हुए ॥

कल्पना करो कि उसने १ कोड़ी सन्तरे मोल लिये तो प्रश्न के अ
नुसार कोड़ी की संख्या १ के दो तुल्य खंड वा $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{२}$ रुपये
और आने की संख्या होगी. क्योंकि $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १$ और $\frac{१}{२}$ रुप
या $= ८$ आने और $\frac{१}{२}$ आना $= ६$ पाई इस कारण १ कोड़ी स
न्तरे के दाम $८ \frac{१}{२}$ आने वा ८ आने और ६ पाई हुई ॥

॥ दूसरी गति से ॥

कल्पना करो कि १ कोड़ी के दाम y आने हैं और सन्तरे
के दाम में उसने जितने रुपये दिये उन की संख्या r है और
जितने आने दिये उन की भी संख्या r है तो प्रश्न के अनुसार
उसने $२r$ कोड़ी सन्तरे खरीदे होंगे और १ कोड़ी सन्तरे के
दाम y आने माने हैं इस लिये $२r$ कोड़ी सन्तरे के दाम $२r$
या $२y$ आने होंगे परंतु प्रश्न के अनुसार सब सन्तरे के
मोल १ रुपये और १ आने हैं और २ रुपये $= १६$ आने इ
स लिये २ रुपये $+ १$ आने $= १६$ आने $+ १$ आने $= १७$ आने ॥

परंतु सन्तरे का एक ही शील होगा इस कारण

$$२५२ = १७२$$

$$२२ का भाग देने से य = \frac{१७२}{२२} = \frac{१७२}{२२} = ८ \frac{१}{११} \text{ आने} = ८ \text{ आने}$$

और ६ पाई ॥

यह १ कोड़ी सन्तरे के दाम हए ॥

इस उदाहरण से यह ज्ञान पड़ा कि ऐसे प्रश्नों में दो अव्यक्त राशि कल्पना करने से एक अव्यक्त राशि का मान सहज में निकल आवेगा और ऊपर के उदाहरण में केवल एक ही समीकरण बना और दूसरी अव्यक्त राशि भाग देने से समीकरण में से निकल गई ॥

॥ तीसरी रीति ॥

कल्पना करो कि एक कोड़ी सन्तरे के य आने दाम हैं और य रुपये और यही आने सब सन्तरे के दाम हैं वा सन्तरे के दाम = य रुपये + य आने ॥

$$= १६ य आने + य आने।$$

$$= १७ य आने।$$

और प्रश्न के अनुसार य + य वा २ य सन्तरे की कोड़ियों की संख्या हुई ॥

॥ चैराशिक से ॥

य कोड़ी सन्तरे : १७ य आने : १ कोड़ी सन्तरे : १७ य और $\frac{१७ य}{१७ य} = १$ आने य एक कोड़ी सन्तरे के दाम हए ॥

(ई) एक ऐसा भिन्न है कि जो उस के संश में १ जोड़ दो तो भिन्न का मान १ होगा और जो हारे २ जोड़े दो तो भिन्न ३ के तुल्य होगा तो बतलाओ कि वह कौन सा भिन्न है कल्पना करो कि $\frac{५}{२}$ इष्ट भिन्न है इस के संश में १ जोड़ दिया तो $\frac{५}{२} + १$

यह भिन्न का रूप होगया ॥

और प्रश्न के अनुसार $\frac{y+1}{2} = 1$ ॥

र से गुणा करने से $y+1=2$ प्रथम समीकरण $\frac{y}{2}$ भिन्न के हर में २ जोड़ा तो $\frac{y}{2+2}$ यह भिन्न का रूप होगया। प्रश्न के अनुसार $\frac{y}{4+2} = \frac{1}{2}$ ॥

२ (२+२) से गुणा किया तो $2y=2+2$ दूसरा समीकरण परंतु प्रथम समीकरण में $2=y+1$ इस लिये र के इस मान की दूसरे समीकरण में स्थापन किया ॥

तो $2y=y+1+2=y+3$ शोधन करने से

$$y=3 \text{ और } 2=y+1=3+1=4$$

इस लिये $\frac{y}{2} = \frac{3}{2}$ यह इष्ट भिन्न हुआ ॥

(७) हो श्रृंखला की एक ऐसी संख्या है कि वह दोनों श्रृंखलाओं के योग से ४ गुनी है और जो उन दोनों श्रृंखलाओं की स्थान बदलकर रखी तो यह जो संख्या बनेगी वह पूर्व द्वी संख्या से १२ के समान छोटी होगी तो बतलाओ कि पहली कौन सी संख्या है ॥

कल्पना करो कि इष्ट संख्या का y दस स्थानीय अंक है और r एक स्थानीय अंक है

तो जैसे $23=100 \times 3+3$ वैसे ही $10y+r$ इष्ट संख्या है।

इस लिये प्रश्न के अनुसार $10y+r=4(y+r)$

$$=4y+4r$$

प्रश्नानुसार नयन से $10y-4y=4r-r$

योग करने से $6y=3r$

३ र भाग देने से $2y=r$ प्रथम समीकरण ॥

और जो श्रृंखलाओं को बदलकर रखें वा $10r+y$ यह दूसरी संख्या हुई।

प्रथम के अनुसार $१०२ + य = २(१०य + २) - १२$

$$= २०य + ४ - १२$$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $१६य - ८२ = १२$

प्रथम समीकरण में $२०य = ८२ - १२$

इस मान को ऊपर के समीकरण में रक्वा तो

$$१६य - १६य = १२$$

$$\text{योग करने से } ३य = १२$$

३ का भाग देने से $य = \frac{१२}{३} = ४$ और $२ = २य = २ \times ४ = ८$ इस लिये ४८ इस संख्या हुई ॥

(८) शाहजहांपुर में एक बज़ाज़ने १० रुपये की रुई लेकर उसे बहुत अच्छी धुनकवा के बहुत महीन कतवाई और आधे सूत की तो बड़े मोल के विल्ले लगवा कर सगढ़ पगड़ियां बुनवाई और आधे सूत की बारीक मलमल बुन व इस सब माल को अंकवाया तो ४४४ रुपयों का ठहरा और दूसरे बज़ाज़ने भी १० ही रुपयों की रुई मोल लेकर अच्छा सूत कतवा कर तिहाई के सूत की तो मलमल बुनवाई और दो तिहाई सूत की जीमती पगड़ियां तो इसने जब अपना माल अंकवाया तो पहले बज़ाज़ के माल के दामों से ३० रुपये बढ़ती का ठहरा तो अब बतलाओ कि एक रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी होगी सब लागत और नफ़ा मिलकर उस के अब कितने दाम हो गये ॥

और १ रुपये की रुई जो मलमल बुनाने में लगी होगी उसके कितने दाम हो गये ॥

कल्पना करो कि १ रुपये की रुई जो पगड़ियों में लगी हो उसमें सब लागत और नफ़ा गिनकर उसके दाम

य रुपये हो गये और १ रुपये की रुई जो मलमल में लगी हो उस में सब सागत और नफ़्त गिन कर उस के दाम र रुपये हो गये॥

तो ग्रन्थ के अनुसार पहले बज़ाज़ ने तो ५ की रुई की तो पगड़ियां बुनवाईं और ५ की रुई की मलमल और सब मिलाकर ४४४ का अंका ॥ वा

५ य + ५ र = ४४४ प्रथम समीकरण और दूसरे क़त्ताज़ ने १० की रुई की तिहाई वा ३ रुपये की रुई की मलमल बुनवाईं और १० की रुई की दो तिहाई वा ३ रुपये की रुई की पगड़ियां बुनवाईं ॥

इस लिये प्रश्न के अनुसार

$$\frac{१०}{३} य + \frac{१०}{३} र = ४४४ + ३०$$

३ का गुणा करने से १० य + १० र = १४२२ दूसरा समीकरण

प्रथम समीकरण के २ से गुणा तो १० य + १० र = ८८८

इस दूसरे समीकरण में से घटाया तो १० य = ५३४

१० का भाग देने से य = ५३ $\frac{३}{४}$ = ५३ $\frac{३}{४}$ = ५३ $\frac{३}{४}$ पाई ॥

पहले समीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$५ र = ४४४ - ५ य = ४४४ - ५ \times ५३ \frac{३}{४} = ४४४$$

$$- २६७ = १७७$$

५ का भाग देने से र = $\frac{१७७}{५}$ = ३५ $\frac{३}{४}$ = ३५ $\frac{३}{४}$ = ३५ $\frac{३}{४}$ पाई ॥

॥ अब इन मानों की सत्यता दिखाते हैं ॥

$$५ र + ५ य = ५ \times ३५ \frac{३}{४} + ५ \times ५३ \frac{३}{४} = १७७ + २६७ = ४४४ रुपये ॥$$

॥ ३ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) गुलाब ने शिवलीन से कहा कि जो तुम मुझे

अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे दो गुनी गोलियां हो जाय और शिवदीनने गुलाब से कहा कि जो तुम मुझे अपनी १० गोलियां दे दो तो मेरे पास तुमसे तीन गुनी गोलियां हो जाय तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य के पास कितनी २ गोलियां हैं ॥

(२) एक मनुष्य के पास दो बटुओं में रुपये हैं और जब उसने १० रुपयों में से ५ एक बटुवे में रख दिये और ५ दूसरे बटुवे में रखे तो पहले बटुवे के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से दूने होगये परंतु जो वह दसों रुपये पहले बटुवे में रख देता तो उस में के रुपये दूसरे बटुवे के रुपयों से तीन गुने हो जाते तो बतलाओ कि हर एक बटुवे में कितने रुपये होंगे ॥

(३) ११ मनुष्यों में ६ पुरुष और ५ स्त्री हों इस परिमाण से एक मण्डली में पुरुष और स्त्रियां हैं परंतु उन में से २ पुरुष जाति रहे और दो स्त्रियां और आगई तो बतलाओ कि पुरुष और स्त्रियां बराबर हो गई अब उस मण्डली में कितने पुरुष और कितनी स्त्रियां थीं ॥

(४) एक दयावान मनुष्य ने ६॥३॥ को कंगले पुरुष और विधवाओं में बांटने का विचार किया और जब उसने हिसाब लगाया तो मालूम हुआ कि जो वह हर एक पुरुष और विधवा को तीन २ आने दे तो उस के पास सब पुन्यार्थ रुपये और आने में से १ आना बच रहेगा और जो वह हर एक पुरुष को ३ २ पाई दे और हर एक विधवा को ३ ६ पाई दे तो उस के पास बांट के ६ पाई बच रहेंगी तो बतलाओ कि कितने कंगले पुरुष थे और

कितनी बिधवा थी ॥

(५) एक ऐसा भिन्न है कि जो उसके अंश और हर दोनों में से १ घटावे तो भिन्न का मान $\frac{1}{2}$ हो जायगा और जो अंश में से २ घटावे और हर में २ जोड़ दें तो भिन्न का मान $\frac{1}{2}$ हो जायगा तो बतलाओ कि कौनसा भिन्न है

(६) ऐसा कौनसा भिन्न है कि उसके अंश और हर का द्वाा योग उनके तिगुने अन्तर के तुल्य हो ॥

(७) ऐसी दो संख्या कौनसी हैं कि उन में एक संख्या जितनी १० से अधिक है उतनी ही दूसरी संख्या १० से छोटी है और उन दोनों संख्याओं का दशांश योग उन के चतुर्थी अन्तर की तुल्य है तो बतलाओ कि वे संख्या कौन सी हैं ॥

(८) ऐसी दो संख्या कौनसी हैं कि जो एक संख्या के आधे में दूसरी संख्या का तिहाई जोड़ें तो योग १२ के तुल्य हो जाय परन्तु जो पहली संख्या की तिहाई में दूसरी संख्या का आधा जोड़ दें तो योग १९ के तुल्य हो जाय ॥

(९) एक मनुष्य के पास दो बर्तनों में घी भरा था तो उसने प्रथम पहले बर्तन में से दूसरे बर्तन में इतना घी उंडेला जितना थी दूसरे बर्तन में भरा था फिर इसी तरह उसने दूसरी बेर दूसरे बर्तन में से पहले बर्तन में इतना घी उंडेला जितना थी कि पहली दफ्ता पहले बर्तन में से दूसरे बर्तन में घी उंडेले पीछे पहले बर्तन में बच रहा था और फिर तीसरी बेर उसने पहले बर्तन से दूसरे बर्तन में इतना घी उंडेला जितना थी कि दूसरी दफ्ता के दूसरे बर्तन में घी रह गया था तो अब दोनों

वर्तनों में वरावर आठ २ सेर ची हो गया वतलाओ कि पहले ही पहल दोनों वर्तनों में कितना २ ची था ॥

(१०) एक संबत् है कि उस के तीन वर्ष पीछे यूरोप खंड के पोर्तुगाल देश में लिस्बन नाम नगर भूचाल से नष्ट हो गया और उस संबत् की संख्या के अंकों में यह संबंध है कि सहस्र के स्थान में तो अंक १ है और शत स्थानीय अंक, दश स्थानीय और एक स्थानीय अंकों के योग के तुल्य है और दश स्थानीय अंक, चारों स्थानों के अंकों के तृतीयांश योग के तुल्य है और एक स्थानीय अंक, सहस्र स्थानीय और शत स्थानीय अंकों के चतुर्थांश योग के तुल्य है तो वतलाओ कि लिस्बन नगर किस संबत् में नष्ट हुआ ॥

॥ घात क्रिया और मूल क्रिया ॥

५७ परिभाषा जब एक राशि को उसी राशि से एक बार वा कई बार गुणा करें तो गुणन फल को पूर्व राशि का घात कहते हैं और गुणा करने में जितने बार राशि गुणा करूँ अवयव के स्वरूप में आवे उस संख्या को उक्त घात का घात प्रकाशक कहते हैं ॥ जैसे ५ × ५ वा ५ इस ५ का दूसरा घात जाना जाता है और गुणा करने में ५ दो बार आवेगा उसे ही और जानो ॥

इस लिये गुणा करने में और घात क्रिया में कुछ अंतर नहीं है और इस कारण जो रीतियाँ गुणा करने के लिये लिख चुके हैं वे घात क्रिया के लिये भी

अवश्य होंगी और याद रखो कि घात क्रिया में गुण्य और गुणक तुल्य होते हैं ॥

॥ घात क्रिया में जो उपयोगी रीति हैं उन्हें लिखते हैं ॥

॥ प्रथम रीति ॥

एक अक्षर की राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो उस के घात प्रकाशक को दूना कर दो जैसे

अ वा अ का वर्ग अ है

अ का वर्ग अ है क्योंकि $अ \times अ = अ^2 = अ^2$

अ का वर्ग अ है क्योंकि $अ \times अ = अ^2 = अ^2$

ऐसे ही और जानो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

जो किसी घात वा दो गुणक रूप अवयवों की एक राशि का दूसरा घात वा वर्ग करना हो तो हर एक गुणक रूप अवयव का वर्ग करलो तो इन वर्गों का घात इस राशि के वर्ग के तुल्य होगा ॥

अ क का वर्ग अ क है क्योंकि $अ क \times अ क = अ क अ क$
 $= अ अ क क = अ क^2$

अ क इस का वर्ग अ क है क्योंकि $अ क \times अ क = अ क अ क$
 $= अ अ क क = अ क^2$

अ क इस का वर्ग अ क है क्योंकि $अ क \times अ क = अ क अ क$
 $= अ अ क क = अ क^2$

॥ ऐसे ही और जानो ॥

इसी रीति से ३५२ का वर्ग $= ३५२ \times ३५२ = ३ \times ३$

५ २४ अक्षर ॥

५ ५ प्रक्रम ॥

ययरर = ८३२२ ॥

और २ अरुग का वर्ग = ४ अ के गे ॥

ऐसे ही जो किसी राशि में और अधिक गुणकरूप अवयव हों तो उन का जुदा २ वर्ग करके इन वर्गों को गुणा करलो ॥

॥ तीसरी रीति ॥

जो भिन्न का वर्ग करना हो तो उस के अंश और हर दोनों का जुदा २ वर्ग करलो ॥ जैसे

अ के इस का वर्ग अ^२ है क्योंकि $\frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अअ}{कक} = \frac{अ^२}{क^२}$

$\frac{अक}{गघ}$ इस का वर्ग $\frac{अ^२क^२}{ग^२घ^२}$ है क्योंकि $\frac{अक}{गघ} \times \frac{अक}{गघ} = \frac{अकअक}{गघगघ}$

$\frac{अक}{गघ} = \frac{अ^२क^२}{ग^२घ^२}$ ॥

$\frac{२४}{३२}$ इस का वर्ग $\frac{४४}{६४}$ है ऐसे ही जो और कोई भिन्न हो तो उस का वर्ग करलो ॥

॥ चौथी रीति ॥

जो दो पद की राशि हों और दोनों पद धन हों तो उस राशि के वर्ग करने की यह रीति है कि हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन वर्गों को जोड़ दो और इस योग में दोनों पदों के दूने घात को मिला दो ॥

॥ कारण यह है ॥

अ + क इस का वर्ग अ^२ + क^२ + २ अक है ॥

अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग + २ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

* ४० प्रक्रम + ४ प्रक्रम * २२ प्रक्रम का चौथा उदाहरण

॥ पांचवीं रीति ॥

जो दो पद की राशि में एक पद ऋण हो और उस राशि का वर्ग करना हो तो हर एक पद का जुदा २ वर्ग करके उन के योग में से दोनों पदों की दूनी घात को घटा दो कारण यह है अ—क इस का वर्ग अ+के—२ अ क है अर्थात् अ का वर्ग + क का वर्ग— अ और क का दूना घात के तुल्य है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$(१) (१+य)^2 = १^2 + य^2 + २ \times १ \times य = १ + य^2 + २ य ॥$$

$$(२) (१-य)^2 = १^2 + य^2 - २ \times १ \times य = १ + य^2 - २ य ॥$$

$$(३) (२+य)^2 = २^2 + य^2 + २ \times २ \times य = ४ + य^2 + ४ य ॥$$

$$(४) (२अ-३य)^2 = (२अ)^2 + (३य)^2 - २ \times २अ \times ३य = ४अ^2 + ९य^2 - १२अय ॥$$

$$(५) (२अ+३क)^2 = (२अ)^2 + (३क)^2 + २ \times २अ \times ३क = ४अ^2 + ९क^2 + १२अक ॥$$

$$(६) (अक-१)^2 = (अक)^2 + १^2 - २ \times अक \times १ = अक^2 + १ - २अक ॥$$

५० चौथी और पांचवीं जो रीति लिखी हैं उनसे बहुत तेरे अंकों के वर्ग बिना लिखे केवल मन में विचार करने से निकल आते हैं। जैसे २५ का वर्ग निकालना हो तो २५ = २० + ५ इस लिये २५ का वर्ग = २० का वर्ग + ५ का वर्ग + २० और ५ का दूना घात = ४०० + २५ + २०० ॥

$$= ६२५$$

२५ के वर्ग के निकालने में जो २ क्रिया करनी पड़ी है वे सब बिना लिखे मन में केवल विचार से हो सकती हैं

२५ का वर्ग निकालो ॥

$$\begin{aligned} २५ का वर्ग &= २० + ५ का वर्ग \\ &= २० + ५ + २ \times ५ \times २० \\ &= २०० + २५ + २०० \\ &= २२५ \end{aligned}$$

इस वर्ग के निकालने की क्रिया से बड़े संकों का वर्ग सहज से निकल आता है। जैसे ४८८ का वर्ग करो क्योंकि

$$४८८ = ५०० - १॥$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } ४८८ \text{ का वर्ग} &= ५०० - १ का वर्ग \\ &= ५०० का वर्ग + १ का वर्ग - २ \times ५०० \times १ \\ &= २५०००० + १ - २००० \\ &= २४८००० + १ \\ &= २४८००१ \end{aligned}$$

इस वर्ग को बिना लिखे केवल मन में विचार करने से कर सकते हैं ॥

५६ ऊपर जो उदाहरण लिखे हैं उन से यह स्पष्ट ज्ञान पड़ता है कि जो एक पद की राशि का वर्ग करेंगे तो वर्ग में भी एक ही पद होगा और जो दो पद की राशि का वर्ग करेंगे तो वर्ग में तीन पद होंगे इससे यह बात निकलती है कि दो पद की राशि पूरा वर्ग नहीं हो सकती बा जो उस का वर्ग मूल ढीक चाहेंगे तो न मिलेगा कारण यह है कि जो दो पद की राशि का वर्ग करते हैं तो वर्ग में तीन पद आते हैं और जो केवल एक पद की राशि का वर्ग करते हैं तो उस के वर्ग में भी केवल एक पद होता है इस कारण दो पद की राशि वर्ग करने से नहीं निकल सकती है ॥

इतना स्मरण रखो कि अ x क इस का वर्ग अ x क है

गौर अ + क इस का वर्ग अ + के नहीं परंतु अ + के + २अ
 क है गौर अ गौर क अक्षरों के स्थान में बाहो से सं
 रखा मान लो ॥

॥ ४ अन्व्यास के लिये प्रश्न ॥

। नीचे जो शब्द लिखी हैं उन का वर्ग निकालो ।

- | | |
|-----------|---------------------------|
| (१) अअय | (११) $\frac{४}{५अकग}$ |
| (२) अअयंर | |
| (३) अअक | (१२) अ + २ |
| (४) अकग | (१३) अक + २ |
| (५) अअकग | (१४) य + ३ |
| (६) अक | (१५) २-२ |
| (७) अअय | (१६) २य-न |
| अक | (१७) २य-३र |
| (८) अक | (१८) य- $\frac{५}{२}$ |
| (९) अअक | (१९) य + $\frac{३}{२}$ |
| (१०) अअय | (२०) यय + न |
| | (२१) अयय-न |
| | (२२) अकय + ग |
| | (२३) अयर-अ |
| | (२४) $\frac{३}{२}$ अक + ग |

॥ मूल क्रिया ॥

६० मूल क्रिया ठीक घात क्रिया से उत्पत्ती होती है
 गौर हम इस क्रिया से वह शब्द जिस की मूल संज्ञा है
 निकाल लेते हैं कि जिस पर घात क्रिया होने से इस शब्द
 निकली हो जैसे अअ का वर्ग मूल निकालो इस का यह

अर्थ है कि एक ऐसी संस्थानिकालो जिस का वर्ग २५ है
इस कारण अ के वर्ग मूल अ है क्योंकि अ ऐसी राशि
है कि उस का वर्ग अ है। और ऐसे ही और जानो ॥

॥ पहली रीति ॥

६१ जो एक पद की राशि का वर्ग मूल निकालना हो तो
उस के घात प्रकाशक को आधा कर दो जैसे अ इस का
वर्ग मूल अ वा अ है क्योंकि $अ + अ = अ$ अ इस का
वर्ग मूल अ है क्योंकि $अ + अ = अ$ ऐसे ही और जानो ॥

॥ दूसरी रीति ॥

६२ जो दो गुणकरूप अवयवों के घात का वर्ग मूल
निकालना हो तो हर एक गुणकरूप अवयव का वर्ग
मूल जुदा निकालो और उन मूल राशियों को गुण
दो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा ॥

इस का वर्ग मूल इस के स्थान में $\sqrt{\quad}$ यह चिन्ह लिखो ॥

॥ उदाहरण ॥

अ क = $\sqrt{अ} \sqrt{क}$ क्योंकि $\sqrt{अ} \sqrt{क} \times \sqrt{अ} \sqrt{क} = \sqrt{अअकक}$
 $\sqrt{अअकक} = अक$ कारण यह है कि जो वर्ग मूल से गुण
करोगे तो घात वर्ग के तुल्य होगा ॥

$\sqrt{अ} \sqrt{क} = \sqrt{अक}$ क्योंकि $\sqrt{अ} \sqrt{क} \times \sqrt{अ} \sqrt{क} = \sqrt{अअकक}$
 $\sqrt{अअकक} = अक$ ॥

ऊपर जो उदाहरण लिखा है उस से यह जान पड़ता
है कि $\sqrt{अ} \sqrt{क}$ इस का वर्ग अक है और इस कारण
अक इस का वर्ग मूल $\sqrt{अक}$ यह है ॥

दूसरी रीति से दो गुणकरूप अवयवों के घातों का
भी वर्ग मूल निकल सकता है ॥

और ऊपर के उदाहरणों के अनुसार यह भी सिद्ध हो
सक्ता है कि जो तीन वा अधिक गुणक रूप अवयवों के घात का
वर्ग मूल निकालना हो तो हर एक गुणक रूप अवयवों
का वर्ग मूल नुहा २ निकाल लो और सब मूल राशियों को
गुण हो तो यह घात इस घात का वर्ग मूल होगा। जैसे

$$\sqrt{अकग} = \sqrt{अ} \sqrt{क} \sqrt{ग} \text{ क्योंकि } \sqrt{अ} \sqrt{क} \sqrt{ग} \times \sqrt{अ} \sqrt{क} \sqrt{ग} = \sqrt{अकग} \\ \sqrt{कग} = \sqrt{अ} \sqrt{अ} \sqrt{क} \sqrt{क} \sqrt{ग} \sqrt{ग} = अकग॥$$

। ऐसे ही और जानो।

॥ तीसरी रीति ॥

६३ जिस भिन्न का वर्ग मूल निकालना हो उस के अंश और
रहर दोनों का त्तरा २ वर्ग मूल निकाल लो ॥ जैसे

$$\sqrt{\frac{अ}{क}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} \text{ क्योंकि } \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} \times \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}} = \frac{\sqrt{अ} \sqrt{अ}}{\sqrt{क} \sqrt{क}} = \frac{अ}{क} \text{ इससे यह}$$

मान पड़ता है कि $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ ऐसी राशि है कि इस का वर्ग
 $\frac{अ}{क}$ है इस कारण $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ इस का वर्ग मूल $\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{क}}$ है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$\sqrt{\frac{१००}{४८}} = \frac{\sqrt{१००}}{\sqrt{४८}} = \frac{१०}{७} \text{ और } \sqrt{\frac{४अ}{४क}} = \frac{\sqrt{४अ}}{\sqrt{४क}} = \frac{२अ}{२क}$$

॥ चौथी रीति ॥

६४ जो तीन पद के पूरे वर्ग का वर्ग मूल निकालना
हो तो उन पदों को किसी एक अक्षर के घातों के अनुसा
र क्रम से लिखो अथवा जिस पद में अक्षर का बड़ा घा

त हो उसे पहले लिखो और फिर जिस पद में अक्षर
का धात उसके बड़े धात से उतरता हो उसे लिखो तिस
पीछे तीसरे पद को लिखो और भाग देने में भी भाज्य
और भाजक के पदों को किसी एक अक्षर के धातों के
अनुसार लिखते हैं और इस वर्ग के तीनों पद धन
हैं तो आदि और अंत के पदों का जुदा २ वर्ग मूल
निकाल लो इन मूल राशियों का योग इस वर्ग का वर्ग
मूल होगा और जो इस पूर्ण वर्ग का मध्य का पद होगा
हो तो आदि और अंत के पदों के वर्ग मूलों का अंतर इ
स वर्ग के वर्ग मूल के तुल्य होगा ॥ जैसे

अ + २ अ य + य इस पूर्ण वर्ग के पद अ अक्षर के
धातों के अनुसार क्रम से लिखे हैं और उस पूर्ण वर्ग
का वर्ग मूल $\sqrt{अ^३ + य^३}$ वा अ + य यह है कारण
यह है कि जो अ + य इस का वर्ग करें तो वह अ + २
अ य + य होता है इसी रीति से अ - २ अ य + य इस
का वर्ग मूल अ - य है ॥

॥ उदाहरण ॥

$$(१) \sqrt{अ^३ + १ + २ अ} = \sqrt{अ^३ + २ अ + १} = \sqrt{अ^३ + १} = अ + १$$

$$(२) \sqrt{य^३ + ८ - ६ य} = \sqrt{य^३ - ६ य + ८} = \sqrt{य^३ - ८} = य - ३$$

$$(३) \sqrt{४ + २ - ४ र} = \sqrt{२^३ - ४ र + ४} = \sqrt{२^३ - ४} = २ - २$$

$$(४) \sqrt{य^३ - य य + ४} = \sqrt{य^३ - य^३} = य - २$$

$$(५) \sqrt{य^2 + ३य + \frac{९}{४}} = \sqrt{य^2 + \sqrt{\frac{९}{४}}} = य + \frac{३}{२}$$

$$(६) \sqrt{म^2 + २मनय + न^2} = \sqrt{म^2 + \sqrt{न^2}} = मय + न$$

$$(७) \sqrt{र^2 - ६र - ९} = \sqrt{र^2 - \sqrt{९}} = र - ३$$

$$(८) \sqrt{\frac{१}{४} अ^2 + अकग + ग^2} = \sqrt{\frac{१}{४} अ^2 + \sqrt{ग^2}} = \frac{१}{२} अक + ग$$

इस जो + अ वा - अ का वर्ग करो तो ये यह वर्ग होगा इस कारण वर्ग मूल के दो चिह्न होते हैं जैसा + इसे धन वा ऋण पढ़ते हैं। जैसे

$$\sqrt{अ} = \pm अ \text{ ऐसे ही } \sqrt{अ^2} = \pm अक$$

$$\sqrt{अ + २अय + य^2} = \pm (अ + य) \text{ आदि}$$

अ + य जोर - (अ + य) इन दोनों राशियों का वर्ग अ + २अय + य है - (अ + य) = -अ - य इस का वर्ग करते हैं।

$$-अ - य$$

$$-अ - य$$

$$अ + अय$$

$$अय + य^2$$

$$अ + २अय + य^2$$

इस लिखे—अ-य वा—(अ+य) इस का वर्ग अ+
२अ य+यै इत्या कारण यह है अ+२अ य+यै कि इ
स का वर्ग मूल—अ-य वा—(अ+य) है ॥

पूर्ण वर्ग उस राशि को कहते हैं जिस का पूर्ण मूल मि
ल जाय जैसे २५ पूर्ण वर्ग है क्योंकि इस का ५ पूरा
वर्ग मूल है और २६ पूर्ण वर्ग नहीं है क्योंकि इस राशि
का ढीक मूल नहीं मिल सका वा ऐसी पूर्ण राशि नहीं
मिलती कि जो उस का वर्ग करें तो २६ हो ॥

इहं प्र० पूर्ण वर्गों के तीन पदों को एक अक्षर के घातों
के अनुसार क्रम से लिखो जैसे यै+२अ य+अ यै-य य+
यै यै+६ य+६ आदि। तो इन में प्रत्येक पूर्ण वर्ग के पदों
में यह संबंध दिखाई पड़ता है कि मध्य पद का वर्ग
आदि अंत के पदों के चौगुने घात के तुल्य है और जो
तीन पदों में यह संबंध न होगा तो उन से पूर्ण वर्ग भी
न बनेगा जैसे यै-७ य+१६ यह पूर्ण वर्ग नहीं है और
इस के आदि अंत की यै और १६ यह राशि पूर्ण वर्ग
है और उस के पूर्ण वर्ग न होने का कारण यह है ॥

(७ यै) वा ४८ यै यह मध्य का वर्ग ४५ १६ यै वा ६४ यै
आदि अन्त के पदों के ४ गुने घात की तुल्य नहीं है
परंतु यै-८ य+१६ यह राशि पूर्ण वर्ग है अथवा य-४
इस राशि का वर्ग है और पूर्ण वर्ग होने का यह भी का
रण है कि (८ यै) वा ६४ यै-४५ १६ यै इन उदाहरणों
से यह बात निकलती है कि जो हम दो पदों में तीसरा
ऐसा पद जोड़ा चाहें जिसे तीन पद की राशि पूर्ण वर्ग
हो जाय तो जिस पद को जोड़ो वह पद ऐसा लेना

बाहिरे कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के चाली
के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग आदि
जानत के पदों के योगने घात के समान हो ॥ जैसे
यै + पय इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग
बनाओ ।

कल्पना करा कि पूव राशि पदा म र पद जोड़ने से पू
र्ण वर्ग बन जाता है तो यै + पय + र यह पूर्ण वर्ग ऊ
आ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता
है उसे देखो ॥ तो

(पय) वा यैयै = यैर \therefore र = $\frac{यै}{४}$ आ इसे पूर्ण वर्ग

में र के स्थान में रक्वा तो यै + पय + $\frac{यै}{४}$ यह इस पू
र्ण वर्ग ऊआ ॥

इसी रति से जो यै - पय इस राशि में $\frac{यै}{४}$ मिलावे
तो य - पय + $\frac{यै}{४}$ यह पूर्ण वर्ग य - $\frac{यै}{४}$ इस राशि का होगा

॥ उदाहरण ॥

यै + पय इस में $(\frac{५}{२})^२$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का
य + ५ मूल होगा ॥

यै - पय इस में जो $(५)^२$ वा ६ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग
का य - ५ मूल होगा ॥

य - पय इस में जो $(\frac{५}{४})^२$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल य + $\frac{५}{४}$ होगा ॥

य + $\frac{1}{2}$ य दस में जो ($\frac{1}{2}$) जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल

य + $\frac{1}{2}$ होगा ॥

य - $\frac{1}{2}$ य दस में जो ($\frac{3}{2}$) जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल

य - $\frac{1}{2}$ होगा ॥

॥५॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

नीचे जो राशिलिखी हैं उनका वर्गमूल निकालो ।

(१) ४ अंक ॥

(७) १ + य - २ य ॥

(२) ८ य $\frac{1}{2}$ ॥

(८) ४ य + ४ य + १ ॥

(३) १०० अंक ग ॥

(९) ४ अ + क - ४ अंक ॥

(४) ८ अ य $\frac{1}{2}$ ॥

(१०) ८ य + ८ य + १ ॥

४ क

(११) य + य + $\frac{1}{2}$ ॥

(५) ४ अ क $\frac{1}{2}$ ॥

(१२) य + $\frac{1}{2}$ - २ ॥

८ य $\frac{1}{2}$

(६) $\frac{1}{2}$ म य $\frac{1}{2}$
न र

॥ नीचे जो राशिलिखी हैं उन्हें पूर्णवर्ग बनाओ ॥

(१३) य - १२ य

(१६) य - $\frac{3}{2}$ य

(१४) य - १४ य

(२०) य + $\frac{1}{2}$ य ॥

(१५) य + १२ य

(२१) य - $\frac{1}{2}$ य ॥

(१६) य + २ य

(२२) य - $\frac{5}{2}$ य ॥

(१७) य - य

(२३) य - $\frac{3}{2}$ य ॥

(१८) य + $\frac{4}{2}$ य

(२४) य - $\frac{4}{2}$ य

॥ वर्ग समीकरण ॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकारका होता है एक

बाहिये कि जब तीनों पदों को एक अक्षर के चाली
के अनुसार क्रम से लिखें तो मध्य पद का वर्ग आदि
अंत के पदों के चोगने घात के समान हो ॥ जैसे
यै + पय इस राशि में तीसरा पद मिलाकर पूर्ण वर्ग
बनाओ ।

कल्पना करा कि पूव राशि पदा म र पद जोड़ने से पू
र्ण वर्ग बन जाता है तो यै + पय + र यह पूर्ण वर्ग ऊ
आ इस कारण जो पूर्ण वर्ग के पदों में संबंध रहता
है उसे देखो ॥ तो

(पय)^२ वा यै^२ = ५ यै र ∴ र = $\frac{५}{४}$ या इसे पूर्ण वर्ग

में र के स्थान में रक्वा तो यै + पय + $\frac{५}{४}$ यह इस पू
र्ण वर्ग ऊआ ॥

इसी गति से जो यै - पय इस राशि में $\frac{५}{४}$ मिलावे
तो य - पय + $\frac{५}{४}$ यह पूर्ण वर्ग य - $\frac{५}{४}$ इस राशि का होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

यै + ६य इस में $(\frac{६}{२})^२$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का
य + ३ मूल होगा ॥

यै - ८य इस में जो $(८)^२$ वा ६ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग
का य - ४ मूल होगा ॥

य - ५य इस में जो $(\frac{५}{२})^२$ जोड़ो तो पूर्ण वर्ग का मूल य + $\frac{५}{२}$ होगा ॥

य + $\frac{1}{2}$ य इसमें जो $(\frac{1}{2})^2$ जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल

य + $\frac{1}{2}$ होगा ॥

य — $\frac{1}{2}$ य इसमें जो $(\frac{1}{2})^2$ जोड़ो तो पूर्णवर्गका मूल

य — $\frac{1}{2}$ होगा ॥

॥५॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

नीचे जो राशिलिखी हैं उनका वर्गमूल निकालो ।

(१) ४ अंक ॥

(७) १ + य^२ — २ य ॥

(२) ८ य^२ ॥

(८) ४ य^२ + ४ य + १ ॥

(३) १०० अंक ग ॥

(९) ४ अ^२ + क^२ — ४ अंक ॥

(४) ८ अ^२ य^२ ॥

(१०) ८ य^२ + ८ य + १ ॥

४ क^२

(११) य^२ + य + $\frac{1}{4}$ ॥

(५) ४ अ^२ क^२ ॥

(१२) य^२ + $\frac{1}{4}$ — २ ॥

८ य^२ ४

(६) $\frac{1}{4}$ • $\frac{म^२ य^४}{न^२ र^२}$

॥ नीचे जो राशिलिखी हैं उन्हें पूर्णवर्ग बनाओ ॥

(१३) य^२ — १२ य

(१६) य^२ — $\frac{३ य}{४}$

(१४) य^२ — १४ य

(२०) य^२ + $\frac{१}{२}$ य ॥

(१५) य^२ + १२ य

(२१) य^२ — $\frac{१}{२}$ य ॥

(१६) य^२ + २ य

(२२) य^२ — $\frac{५ य}{४}$ ॥

(१७) य^२ — य

(२३) य^२ — $\frac{३ य}{४}$ ॥

(१८) य^२ + $\frac{४ य}{५}$

(२४) य^२ — $\frac{४७ य}{१०}$

॥ वर्ग समीकरण ॥

६७ परिभाषा वर्ग समीकरण दो प्रकारका होता है एक

वर्गसमीकरण और दूसरा मध्यमाहरण प्रथम ४६ प्रक्रम से
 ४६ प्रक्रम तक जो रीतिलिखी हैं उनको किया जिस
 समीकरण पर करने से समीकरण में केवल अव्यक्त रा
 शिकावर्ग रह जाय जैसे य^२ तो ऐसे समीकरण को व
 र्ग समीकरण कहेंगे दूसरे जिन समीकरणों में अ
 व्यक्त राशि का वर्ग और उस का पहिला घात दोनों
 रहते हों जैसे य^२ और य ऐसे समीकरणों को मध्य
 माहरण कहेंगे ॥

६८ प्र० जिस रीति से एक घात एक वर्ग समीकरण में
 अव्यक्त राशि का मान निकल आता है उस रीति से
 वर्ग समीकरण में अव्यक्त राशि के वर्ग का मान निकल आवे
 गा फिर वर्ग मूल निकालने से अव्यक्त राशि का दृष्ट मान नि
 लजायगा और जो पहिले ही समीकरण में अव्यक्त राशि
 व्यक्त राशि के साथ ऐसे स्वरूप में मिली हो जैसे (य-अ)
 = क इस समीकरण में य अव्यक्त राशि, अ, व्यक्त रा
 शि के साथ मिली है वा समीकरण का लघुतम रूप करने
 से उसमें अव्यक्त राशि, व्यक्त राशि के साथ पूर्व स्वरू
 प में मिली हो ॥

जैसे (य-अ) = क इसका वर्ग मूल निकाला तो य-अ
 = $\pm \sqrt{\text{क}}$ इस कारण पक्षांतरानयन से य = अ $\pm \sqrt{\text{क}}$

॥ उदाहरण ॥

(१) $३य - २ = २य + २$ इस वर्ग समीकरण में य का मान न
 ताओ ॥

पक्षांतरानयन से $३य - २य = २ + २$
 योग करने से $य = ४$

वर्गमूल निकालने से

$$y = \sqrt{8} = \pm 2$$

(२) $\frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{4} = \frac{1}{3}$ इसमें y का मान निकालो छेद
गम के अर्धद्वारे के लघु समाप्त्य ४८ से

समीकरण के प्रत्येक पद को गुणा करो तो

$$१६y^2 - १२y^2 - ३y^2 = १६$$

योग करने से $y^2 = १६$

वर्गमूल निकालने से

$$y = \sqrt{१६} = \pm ४$$

(३) $७(२y^2 - ६) + ५(३ - y^2) = १६८$ इसमें y का मा
न बताओ ॥

$७(२y^2 - ६) = १४y^2 - ४२$ और $५(३ - y^2) = १५ - ५y^2$
दूसकारण ४४ प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ को दूर किया। तो

$$१४y^2 - ४२ + १५ - ५y^2 = १६८$$

पसांतरानयन से $१४y^2 - ५y^2 = १६८ + ४२ - १५$

योग करने से $९y^2 = २२५$

९ का भाग देने से $y^2 = \frac{२२५}{९} = २५$

वर्गमूल निकालने से $y = \sqrt{२५} = \pm ५$

(४) $\frac{४}{३+y} + \frac{४}{३-y} = ३$ इस समीकरण में y का मान बताओ

$३+y$ से गुणा किया तो $४ + \frac{१२+४y}{३-y} = ९ + ३y$

पसांतरानयन से $\frac{१२+४y}{३-y} = ५ + ३y$

$३-y$ से गुणा किया तो $१२+४y = १५ + ९y - ५y - ३y^2$

पसांतरानयन से $३y^2 + ४y + ५y - ९y = १५ - १२$

योग करने से $३y^2 = ३$

३ का भाग देने से

$$y^2 = १$$

वर्गमूल निकालने से

$$y = \sqrt{१} = \pm १$$

(५) $(४y - ५) = ४y$ तो y का मान बताओ

वर्गमूल निकालने से $४य - ५ = \pm २य$ ॥

पक्षांतरानयन से $४य \pm २य = ५$ ॥

\pm इस बिन्दु को स्तुण बाधन पढ़ते हैं ॥

इस कारण $२य = ५$ वा $६य = ५$ ॥

इसलिये $य = २\frac{१}{२}$ वा $य = \frac{५}{६}$ ॥

अभ्यासकेलिये प्रश्न

नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें $य$ का मान बताओ ॥

(१) $२य - ५ = \frac{५}{२} + ७$ ॥

(२) $(य + १)^२ = २य + १७$ ॥

(३) $(य + २)^२ = ४य + ५$ ॥

(४) $(२य - ५)^२ = य^२ - २०य + ७३$

(५) $\frac{य^२ - ३य - २}{२य - ५} = ३ - \frac{२य - ५}{२य - ५}$ ॥

(६) $\frac{२य^२ + १५य + १०}{२य - ५} = ७ - \frac{५० + ५}{२य - ५}$ ॥

(७) $\frac{य^२}{२} - \frac{य}{१५} + \frac{य}{२५} = ४\frac{२}{३}$ ॥

(८) $१३\frac{२}{४} - \frac{य^२}{२} = २य^२ - ८\frac{३}{४}$ ॥

(९) $\frac{१}{१ + य} + \frac{३}{१ - य} = ८$

(१०) $\frac{१}{य^२} - \frac{३}{२य^२ + १} = \frac{५}{४(३य^२ + १)}$ ॥

(११) $\frac{१४य^२ + १६}{२१} - \frac{२य^२ + ८}{८य^२ - ११} = \frac{२य^२}{३}$

(१२) $(य - \frac{३}{४})^२ = \frac{१}{४}$ ॥

४८ मध्यमाहरण में अव्यक्त राशि के मान लाने की रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

प्रथम ४६ प्रक्रम से ४८ प्रक्रम तक जो रीति लिखी हैं उनसे दृष्ट समीकरण पर छेद गम्य पक्षान्तरानयन योग करना आदि किया करने से पूर्व समीकरण का इस अर्थ + कय = ग मध्यमाहरण का सा स्वरूप कर लो जिस से जितने पदों में अव्यक्त राशि का वर्ग हो उन का योग करके वे सब अर्थ इस स्वरूप में आज्ञाय और जितने पदों में अव्यक्त राशि का पहिला घात होवे सब योग करके से कय ऐसे स्वरूप में डकट्टे हो जाय तो अर्थ इस स्वरूप की राशि को और कय इस स्वरूप की राशि को समीकरण के एक पक्ष में लिखो और सब व्यक्तराशियों को डकट्टा कर जैसे ग दूसरे पक्ष में लिखो ॥

दूसरे जब समीकरण का अर्थ + कय = ग ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण की प्रत्येक राशि में अव्यक्त राशि के वर्ग वा य इस के गुण का भाग दो तो समीकरण का अर्थ + कय ग ऐसा स्वरूप हो हो जायगा और जो भाग देने से क और ग ये भिन्न पूर्णक हो जाय तो कर लो ॥

तीसरे जब समीकरण का अर्थ + कय = ग वा भाग देने से अर्थ + घय = च ऐसा स्वरूप हो जाय तो समीकरण के प्रत्येक पक्ष में य अव्यक्त राशि आधे गुण का वर्ग जोड़ दो तो जिस ओर के पक्ष में अव्यक्त राशि होगी उन को भिन्नाकर पूर्ण वर्ग हो जायगा ॥

चौथे जब अव्यक्त राशियों का पक्ष पूर्ण वर्ग हो जाय

तो समीकरण के हर एक पक्ष का जुदा २ वर्ग मूल निकाल लो इससे पूर्व समीकरण का एक वर्ण एक घात समीकरण का स्वरूप हो जायगा इस कारण उसमें से य राशि का मान एक वर्ण एक घात समीकरण सम्बन्धी पूर्व रीतियों पर क्रिया करने से निकल आवेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

$३य - १२य + ३२ = य + १२य - ३२$ इस समीकरणमें य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से $३य - य - १२य - १२य = -३२ - ३२$ ॥

योग करने से $२य - २४य = -६४$

हो का भाग देने से $य - १२य = -३२$

दोनों पक्षोंमें $(\frac{११}{१})$ वा ६ जोड़ा तो $य - १२य + ६२ = ३६ - ३२ = ४$

वर्ग मूल निकालनेसे $य - ६ = \pm २$

इस कारण से $य = ६ \pm २ = ८$ वा ४

य राशि के ८ और ४ इतने दोनों मानों को पृथक् २ इस समीकरणमें य के स्थानमें रखो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी। जैसे समीकरणमें य के स्थानमें ८ रक्खा ॥

$३ \times ८ - १२ \times ८ + ३२ = ८ + १२ \times ८ - ३२$

वा $१८ - ९६ + ३२ = ८ + ९६ - ३२$

योग करनेसे $१८ - ९६ + ३२$

दूसरे य के स्थान में ४ रख्यो तो

$$३ \times ४ - १२ \times ४ + ३२ = ४ + १२ \times ४ - ३२$$

$$\text{वा } ४८ - ४८ + ३२ = १६ + ४८ - ३२$$

$$\text{योग करने से } ३२ = ३२$$

॥ उदाहरण ॥

$$(२) \text{ ५ (य}^३\text{ - ५)} - २य (य - २) = ६० \text{ इस समीकरण में}$$

य का मान बताओ ॥

$$\text{५ (य}^३\text{ - ५)} = ५य^३ - २५ \text{ और } २य (य - २) = २य^२ - ४य \text{ इस लिये } ५य^३ - २५ - २य^२ + ४य = ६० ॥$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से } ५य^३ - २य^२ + ४य = ६० + २५ ॥$$

$$\text{योग करने से } ५य^३ + ४य = ८५ ॥$$

$$\text{३ का भाग देने से य} + \frac{४}{३}य = \frac{८५}{३} ॥$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में $(\frac{३}{३})^२$ जोड़ा ॥ तो

$$\text{य} + \frac{४}{३}य + (\frac{३}{३})^२ = \frac{८५}{३} + \frac{४}{३} = \frac{३५५ + ४}{३} = \frac{३५९}{३} ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया य} + \frac{४}{३} = \sqrt{\frac{३५९}{३}} = \pm \sqrt{\frac{३५९}{३}} ॥$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से य} = \pm \sqrt{\frac{३५९}{३}} - \frac{४}{३} = \frac{१५}{३} \text{ वा } - \frac{१५}{३} ॥$$

$$= ५ \text{ वा } -५ \frac{१}{३} ॥$$

(३) य + पय = ५ इस समीकरण में य का मान बताओ
समीकरण के दोनों पक्षों में $(\frac{५}{५})^२$ जोड़ा ॥ तो

$$\text{य} + पय + (\frac{५}{५})^२ = (\frac{५}{५})^२ + ५ ॥$$

$$= \frac{५^२}{४} + ५ ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो य} + \frac{५}{२} = \pm \sqrt{\frac{५^२}{४} + ५} ॥$$

$$यस्तान्तरानयन से य = -\frac{य}{२} \pm \sqrt{\frac{य^२}{४} + म} ॥$$

इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में चाहे जो संख्या मान लो तो भी समीकरण की समता बनी रहेगी और जो मध्यमा हरण इस य + पय = म स्वरूप के होंगे उन में अव्यक्त राशि का मान लाने के अर्थ केवल

$$य = -\frac{य}{२} \pm \sqrt{\frac{य^२}{४} + म} \text{ इस समीकरण में प और म राशियों के स्थान में जो संख्या इस समीकरण में हो उन्हें रखने से अव्यक्त राशि का मान निकल आवेगा जैसे य + ४ य = १२ इस समीकरण में य + पय = म इस समीकरण की अपेक्षा प = ४ और म = १२ इसलिये य}$$

$$= \frac{य}{२} \pm \sqrt{\frac{य^२}{४} + म} = -\frac{४}{२} \pm \sqrt{\frac{४^२}{४} + १२}$$

$$= -२ \pm \sqrt{१६} = -२ \pm ४ = २ वा -६$$

(४) $\frac{य+२}{य-२} - \frac{य-२}{य+२} =$ इस समीकरण में य का मान बताओ छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को (य-२)(य+२) से गुणा तो

$$(य+२)^२ - (य-२)^२ = (य-२)(य+२) ॥$$

$$\text{ता य} + २य + २ - य + २य - २ = य^२ - १ ॥$$

$$\text{यस्तान्तरानयन और योग करने से य} - ४य = २ ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों में } (\frac{५}{४})^२ \text{ या } ४ \text{ तोड़ा तो य} - ४य + ४ = ५ ॥$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया य} - २ = \pm \sqrt{५} ॥$$

$$\text{इस कारण यस्तान्तरानयन से य} = \pm \sqrt{५} ॥$$

(५) य + य + २ = य + २ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

पहिले पक्ष के भिन्नों को सम छेद करके जोड़ा ॥ तो

$$\frac{य+१+य}{य+२} = \frac{२}{य+२} \text{ या } \frac{२य+२}{य+२} = \frac{२}{य+२} ॥$$

छेद गम के अर्थ दोनों पक्षों को $(य+२)(य+२) ॥$

तो गुणा तो $(२४+१)(य+२) = य+२ ॥$

दा $२य+५य+२ = य+२ ॥$

पक्षान्तरानयन और योग करने से $य+४य = -२$

दोनों पक्षों में $(\frac{५}{१})$ वा ४ जोड़ा तो $य+४य+४ = ४-२ = २$

दोनों पक्षों का मूल लिखा तो $य+२ = \pm \sqrt{२} ॥$

पक्षान्तरानयन से $य = -२ \pm \sqrt{२} ॥$

॥ पूर्ण वर्ग करने का सूत्र लिखते हैं ॥

श्री धराचार्य सूत्रं ॥ चतुराहत वर्ग समे रूपैः

पक्षद्वयं गुणयेत् अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौ

नतो मूलम् १ ॥

इस का यह अर्थ है कि दोनों पक्षों को अव्यक्त राशि के वर्ग के चार गुने गुण से गुणा करो और फिर दोनों पक्षों में अव्यक्त राशि के एक घात के गुण का वर्ग जोड़ दो अर्थात् जो समीकरण का $अय+कय = ग$ यह स्वरूप हो और क और ग राशि ऋण हों वा धन तो समीकरण के दोनों पक्षों को ४ अ वा य के ४ गुने गुण से गुणा कर दो और फिर दोनों पक्षों में क वा य के गुण का वर्ग जोड़ दो और फिर दोनों पक्षों का वर्ग मूल निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $३य+२ = ८५$ इस समीकरण में य का मान बताओ ॥

४×३ वा १२ से गुणा तो $३६य+२४य = १०२०$

२ वा ४ को दोनों पक्षों में जोड़ा तो $३६य + २४य$
 $+ ४ = १०२४$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल निकाला तो $६य + २ = \pm ३२$

पक्षान्तरानयन से $६य = \pm ३२ - २$

६ का भाग देने से $य = ५ वा - ५\frac{१}{३} ॥$

(२) $५य - ६य + २\frac{१}{३} = ०$ इसमें य का मान बताओ ॥

पक्षान्तरानयन से $५य - ६य = - २\frac{१}{३} ॥$

$५ - ५ वा २०$ से गुणा किया तो $१००य - १००य = - ४५$

दोनों पक्षों में ६ वा ८१ जोड़ा तो

$१००य - १००य + ८१ = ८१ - ४५ = ३६$

दोनों पक्षों का मूल लिया $१०य - ६ = \pm ६$

पक्षान्तरानयन से $१०य = ६ \pm ६$
 $= १५ वा ३$

१० का भाग देने से $य = \frac{१५}{१०} वा \frac{३}{१०}$
 $= \frac{३}{२} वा \frac{३}{१०} ॥$
 $= १\frac{१}{२} वा \frac{३}{१०} ॥$

॥ ६ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) $य = ३य + २० ॥$

(६) $य + \frac{५}{३} = ३॥$

(२) $य = ५य - ४ ॥$

(१०) $य - \frac{३य}{२} = २० ॥$

(३) $य - ६य = य - २६ ॥$

(११) $य + \frac{६य}{२} = ६३ ॥$

(४) $य - १४य = १२० ॥$

(१२) $६य - ५य = २\frac{१}{३} ॥$

(५) $१२य - २० = य ॥$

(१३) $१०य + ३य = ६ ॥$

(६) $४य - य = ४ ॥$

(१४) $\frac{य}{३} + \frac{३य}{९} = २१ ॥$

(७) $७य - य = ६ ॥$

(१५) $य - \frac{य}{३} = ३४ ॥$

(८) $य = य - ३० ॥$

(१६) $११य - ६य = १२\frac{१}{३} ॥$

$$(१७) २य - ५य + ३ = ० ॥$$

$$(१८) \frac{१}{३} य - \frac{१}{३} य - २\frac{२}{३} = ० ॥$$

$$(१९) \frac{१}{२} य - \frac{१}{३} य + ७\frac{३}{८} = ८ ॥$$

$$(२०) \frac{३}{४} य - \frac{२}{३} य = १\frac{२}{३} ॥$$

$$(२१) ५(य + १) - ३(य - १) = २२ ॥$$

$$(२२) य - ४ = १६ - (य - २) ॥$$

$$(२३) २(य - २)^२ - ३ = ८(य + २) ॥$$

$$(२४) \frac{३}{४} (य - ३) = \frac{१}{२} (य - ३) ॥$$

$$(२५) ३(२ - य) + २(३ - य) = २(४ + ३य) ॥$$

$$(२६) य + (य + १)^२ = \frac{१३}{६} य (य + १) ॥$$

$$(२७) ४(य - १) - \frac{य - १}{२य} = ३\frac{३}{४} ॥$$

$$(२८) \frac{६}{१ + य} + \frac{२}{य} = ३ ॥$$

$$(२९) \frac{८०}{य + ४} = \frac{८०}{य} - १ ॥$$

$$(३०) \frac{१}{य - १} \frac{१}{य + १} = \frac{१}{३५} ॥$$

$$(३१) \frac{य + २}{य - १} \frac{४ - य}{२य} = २\frac{१}{३} ॥$$

$$(३२) \frac{४य}{५ - य} - \frac{४(५ - य)}{य} = १५ ॥$$

$$(३३) \frac{३य-७}{५} = ३\frac{१}{२} - \frac{४(य-२\frac{१}{२})}{य+५} \parallel$$

$$(३४) \frac{४य-३}{३य-७} - \frac{२य-३}{४-१} = ३ \parallel$$

$$(३५) \frac{७+य}{७-य} + \frac{७-य}{७+य} = २\frac{८}{१०} \parallel$$

$$(३६) \frac{३य-५}{२य+५} + \frac{१३५}{१७६} = \frac{३य+५}{३य-५} \parallel$$

$$(३७) \frac{३य+२}{३य-२} + \frac{३य-२}{३य+२} = \frac{१५य+१२}{३य+२} \parallel$$

$$(३८) \frac{३}{५-य} + \frac{२}{४-य} = \frac{८}{य+२} \parallel$$

$$(३९) \frac{५य+३}{१०-य} = \frac{२य}{२५-३य} - ६\frac{१}{२} \parallel$$

$$(४०) \frac{य+८}{य+१२} + \frac{५}{य+४} = \frac{३य+२४}{२य+८} \parallel$$

(७१) कभी २ ऐसा भी होता है कि जब दो समीकरणों में दो अव्यक्त राशि रहती हैं तो उन दो समीकरणों में एक वर्ण शोधन से मध्यमा हरण समीकरण निकल आता है और इसमें अव्यक्त राशि का मान मध्यमाहरण संबंधी रीतियों में ले आओ और इस मान को कुछ समीकरणों में से एक समीकरण में रख दो फिर एक वर्ण एक घात समीकरण संबंधी रीतियों से दूसरी अव्यक्त राशि का मान निकालो ॥

॥ उदाहरण ॥

२य-८=य-२ } य और र का मान बताओ ॥

और य-२=२य+२

पहिले समीकरण में पक्षान्तरानयन से ॥

$$२य-य=८-२ ॥$$

योग करने से य=८-२

पक्षान्तरानयन से र=८-य

र के मान ८-य को दूसरे दृष्ट समीकरण में रक्खा तो

$$य(८-य)-(८-य)=२य+२$$

वा ८य-य^२-८+य=२य+२ पक्षान्तरानयन और योग

करने से य^२-७य=-१० दोनों पक्षों में ($\frac{७}{२}$)^२ जोड़ा तो

$$य^२-७य+(\frac{७}{२})^2 = \frac{४९}{४}-१० = \frac{९}{४} \text{ दोनों पक्षों का वर्ग}$$

मूल लिया तो य- $\frac{७}{२} = \pm \frac{३}{२}$ पक्षान्तरानयन से

$$य = \frac{७+३}{२} = ५ \text{ वा } २$$

और र=८-य = ८-५ वा ८-२=३ वा ६ ॥

$$(२) २य-३यर=२$$

और ३य+२र=८य } य और र का मान बताओ ॥

पहिले समीकरण को २ से गुणा किया तो ४य-६यर=४

दूसरे समीकरण को ३य से गुणा किया तो ९य+६यर=२४य

दोनों समीकरणों का योग करने से १३य=४+२४य ॥

पक्षान्तरानयन से १३य-२४य=४ ॥

दोनों पक्षों में १३ का भाग दिया तो य- $\frac{२४}{१३}$ य= $\frac{४}{१३}$

दोनों पक्षों में ($\frac{१३}{१३}$)^२ जोड़ा तो य- $\frac{२४}{१३}$ य+($\frac{१३}{१३}$)^२ =

$$\frac{१४४}{(१३)२} + \frac{४}{(१३)} = \frac{५२+१४४}{(१३)२} = \frac{२८६}{(१३)२}$$

$$\text{दोनों पक्षों का वर्गमूल लिया य-}\frac{१३}{१३} = \pm \frac{१४}{१३}$$

$$\text{पक्षान्तरानयन से य} = \frac{१३}{१३} \pm \frac{१४}{१३} = \frac{१३+१४}{१३} = \frac{२६}{१३} \text{ वा } \frac{२}{१३}$$

$$= २ \text{ वा } \frac{२}{१३}$$

और दूसरे दृष्टसमीकरण में पक्षान्तरानयन से

$$२२ = ८ - ३य = ८ - ६वा ८ + \frac{६}{१३} = २वा ८ + \frac{६}{१३}$$

इस लिये २ का भाग देने से $२ = १वा ४ + \frac{३}{१३}$

॥ ७ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

य-२२=०	}	२-य=२	}
(१) ३य-२२=४०		(७) १०य+२=३४२	
(२) ५य-३२=१००	}	(८) २य-३२=१	}
५य-४२=०		२य+य-५२=२०	
(३) ३य+५२=०	}	(९) ५य-२२=४	}
३य-३२=२१		३य+४य-३६	
(४) ६(य-२)=२०	}	य+२=५	}
य२=२०		(१०) २य-२=१३	
(५) ३(य+२)=२४	}	३य+२२=१४	}
८य२=२		(११) २य+३२=५६	
(६) २य+३२=११	}	(१२) ४य=१४	}
य+य२=४		य+२-य२-७२=	

॥ वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्न ॥

(१) वह कौन सी संख्या है कि जो उसे उस के भाग से

गुणा करें तो घात ५० के तुल्य हो ॥

कल्पना करो कि य दृष्ट संख्या है

तो य आधी दृष्ट संख्या हुई

इस लिये प्रश्न के अनुसार $y \times \frac{y}{2} = 40$

$$\text{वा } \frac{y^2}{2} = 40$$

२ से गुणा किया तो $y^2 = 80$ ॥

वर्ग मूल लिया तो $y = \pm 8.94$ ॥

इस कारण दृष्ट संख्या +१० मानो वा -१० मानो तो

भी प्रश्न की सत्यता बनी रहेगी ॥

$$\text{क्योंकि } 10 \times \frac{20}{2} = 10 \times 10 = 100$$

$$\text{और } -10 \times \frac{-20}{2} = -10 \times -10 = 100$$

(२) कई आदिमियों ने मिकल कर कई थान कपड़े के नीलाम में खरीदे और उन्हें बजाज के हाथ बेचा तो उन को उन थानों के बेचने में ५॥३॥ नफ़ा बचा और जब उन्होंने इस नफ़ा को बांटा तो जितने मनुष्य सामी थे उतने ही २३ आने हर एक सामी को मिले तो बतलाओ कि वे कितने सामी थे ॥

कल्पना करो कि य सामियों की संख्या है ॥

तो प्रश्न के अनुसार एक सामी को $y \times 2\frac{1}{2}$ नफ़ा के मिले होंगे और इस कारण य मनुष्यों को $y \times y + 2\frac{1}{2}$ आने नफ़ा के मिले होंगे और ५॥३॥ सब नफ़ा है इस के आने ६० हुए ॥

$$\text{इस लिये } y \times y \times 2\frac{1}{2} = 60$$

$$2\frac{1}{2} \text{ का भाग देने से } y = \frac{60}{2\frac{1}{2}} = 24$$

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लिया तो $y = \pm 6$

इस लिये 6 मनुष्य सागी थे और—6 मनुष्य व्यवहार की रीति से इस प्रश्न का उत्तर ही नहीं सकता ॥

(3) एक मनुष्य ने जुलाहे से मोटे धोती के जोड़े 6 रुपये की मोल लिये और फिर उसने 13 1/2 आने एक जोड़े के हिसाब से सब जोड़े बेच डाले तो जितने दामों को उसने एक जोड़ा मोल लिया था उतना उस मनुष्य को नफ़ा हुआ तो बतलाओ कि उस मनुष्य ने कितने जोड़े धोती के मोल लिये थे ॥

कल्पना करो कि य जोड़ों की संख्या है ॥

और सब जोड़ों के दाम 6 के आने किये तो 6 1/2 आने हुए ॥

अब त्रैशिक से 1 जोड़े के दाम निकाले ।

य : 1 : : 6 1/2 : 6 1/2 इतने आने एक जोड़े के दाम हुए और उसने एक जोड़ा 13 1/2 आने को बेचा इस लिये उसने सब य जोड़े $y \times 13 1/2$ आने को बेचे होंगे ये विकरी के दाम हुए इन में से खरीद के दाम निकाल लिये तो $y \times 13 1/2 - 6 1/2$ इतने आने नफ़ा के बच रहे ॥

इस लिये $y \times 13 1/2 - 6 1/2 = 6 1/2$

दोनों पक्षों को 2y से गुणा किया तो $20y - 12 1/2 y = 12 1/2$

3 का भाग देने से $2y - 6 1/4 y = 6 1/4$

2 का भाग देने से $y - 3 1/8 y = 3 1/8$

पूर्ण वर्ग करने के लिये $(3 1/8)^2$ जोड़ा तो $y^2 - 3 1/8 y + (3 1/8)^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{64}{64} + \frac{1024}{64} \\ &= \frac{1088}{64} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का मूल लिखा तो ग- $\frac{33}{2} = 16 \frac{1}{2}$

$$\text{पक्षान्तरानघन से य} = \frac{32 + 40}{2} = 36 \text{ वा } \frac{72}{2} = 36 \text{ वा } \frac{72}{2}$$

इस लिये आठ जोड़ों की संख्या निकली ॥

(४) एक जमींदार ने ग्रामों के पेड़ों की रोह लगवाई और उसने बराबर दूर पर बराबर पंक्ति में बराबर २ थांभले एक वर्ग क्षेत्र में खुदवाये और जब उसने एक सिरे से पेड़ धरवाये तो सब थांभले पेड़ों में भर गये और ११ पेड़ और बच रहे फिर उसने इन ११ पेड़ों को एक एक करके एक २ पंक्ति की सीध में लगवा दिये और २४ थांभले और खुदवाये और उसने देखा कि जो इन थांभलों में भी पेड़ लग जाय तो हर पंक्ति में बराबर २ पेड़ हो जायगे और चाहो जिस ओर से पंक्ति में जो वर्ग क्षेत्र के स्वरूप में अन्तर न पड़ेगा तो बसलाओ कि उसने कितने पेड़ लगवाये ॥

कल्पना करो कि वर्ग क्षेत्र की एक भुज की ओर य पेड़ लगे हैं तो य × य वा य इतने पेड़ संपूर्ण वर्ग क्षेत्र में लगे होंगे इस लिये य + १ इतने पेड़ ग्राम के उसने लगवाये और जब उसने एक भुज के य पेड़ों की सीध में २ पेड़ लगवा दिये तो उस भुज की ओर के पेड़ों की संख्या (य + १) हुई और (य + १) × (य + १) वा (य + १) इतने पेड़ दूसरे वर्ग क्षेत्र में हो जाते जो २४ पेड़ और होते इस लिये प्रश्न के अनुसार ॥

$$(य + १) - २४ = य + ११$$

$$वाय + २ य + १ - २४ = य + ११$$

पञ्चान्नयनयन और योग करने से $२य = ३४$

$$२ का भाग देने से $य = \frac{३४}{२} = १७$$$

$$वर्ग करने से $य = ३४८$$$

इस लिये $य + ११$ वा २८ + ११ वा ३९ संपूर्ण पेड़ लगेंगे।

अब चव वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज एक एक चव वर्ग और अग में २७ पेड़ आम के लगें हैं और जो बाकी पेड़ ११ बच रहें उनमें से प्रथम तो एक पेड़ एक भुज की सीध में लगाया और दूसरे पेड़ को दूसरे भुज के नीचे जो आमों के पेड़ों की पङ्क्ति लगी है उस के सीध में लगाया ऐसे ही ग्यारहवीं पङ्क्ति तक ग्यारहों पेड़ लगा दिये और बाकी छः पङ्क्ति जो नीचे रह गई उन के सीध में एक २ यांभले का चिन्ह कर दिया और फिर सत्तरहवीं पङ्क्ति के यांभले के नीचे से चराचर २८ यांभले और खोद लिये तो अब चव वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में अठारह पूर्ण मले होंगये ॥

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十
廿一	廿二	廿三	廿四	廿五	廿六	廿七	廿八	廿九	三十	三十一	三十二	三十三	三十四	三十五	三十六	三十七	三十八	三十九	四十
四十一	四十二	四十三	四十四	四十五	四十六	四十七	四十八	四十九	五十	五十一	五十二	五十三	五十四	五十五	五十六	五十七	五十八	五十九	六十
六十一	六十二	六十三	六十四	六十五	六十六	六十七	六十八	六十九	七十	七十一	七十二	七十三	七十四	七十五	七十六	七十七	七十八	七十九	八十
八十一	八十二	八十三	八十四	八十五	八十六	八十七	八十八	八十九	九十	九十一	九十二	九十三	九十四	九十五	九十六	九十七	九十八	九十九	一百

(५) एक मनुष्य ने छापे खाने में किताबें छापने को
ही तो किताबों के सब सफों की छपवाई के दाम २० ठह
रे परन्तु पीछे से किताब में पांच सफे और पिलाये ग
ये और कह सुन के दो आने सफा छपवाई में कमती
ठहराया तो सब सफों की छपवाई के दाम २६ ॥ = ठह
रे जो बतलाओं कि उस्तक में सब कितने सफे होंगे ॥

कल्याण करो कि पुस्तक में पहिले य सफ़ेये ओर
२०) के ज्ञाने किये तो ३२० ज्ञाने हुए ॥

और १६॥३॥ के २७० आने हुए ॥

और पहिले य सफे की छपवाई के दाम ३२० आने
ठहरे थे इस लिये त्रैराशिक से १ सफे की छपवाई के
दाम ३२० आने हुए ॥

और पीछे से जब ५ सफे और मिलाये गये तो य+५
इतने सफे की छपवाई के दाम २७० आने ठहरे इ
स लिये त्रैराशिक से १ सफे की छपवाई के दाम
२७० आने हुए ॥

और पीछे से फी सफे की छपवाई के दाम २ आने क
म ठहरे थे इस लिये प्रश्न के अनुसार $\frac{३२०}{य} = \frac{२७०}{य+५} + १$
२ क भाग देने से $\frac{१६०}{य} = \frac{१३५}{य+५} + १$ दोनों पक्षों को य (य+५)
से गुणा तो $१६० य + ८०० = १३५ य + ५ + ५ य$ ॥

पक्षान्तरानयन और योग करने से ॥

य-२० य = ८०० दोनों पक्षों में
($\frac{३०}{२}$)^२ वा १०० जोड़ा य-२० य + १०० = ८०० दोनों पक्षों का
वर्ग मूल लिया तो य-१० = ± ३०

पक्षान्तरानयन से य = १० \pm ३० = ४० वा -२०

इस लिये प्रश्न का ४० सफे उत्तर हुआ और न-२०
सफे क्योंकि—२० कहने से प्रश्न का उत्तर कुछ समय
में नहीं आता और जो कोई पूछे कि किताब में कित
ने सफे हैं और उस का उत्तर दिया जाय कि—२० सफे
तो यह उत्तर दीकन होगा ॥

(६) १, २, ३, ४, आदि गिन्ती के धरोसे अङ्क हैं कि
जो उस की क्रम से लो और पहिले दो अङ्कों को रखो तो
जो संख्या बनेगी वह शेष दो अङ्कों के घात की तुल्य होगी

तो वताओ कि वे कौन से चार अङ्क हैं ॥

कल्पना करो कि य, य+१, य+२ और य+३ ये ४ अङ्क हैं तो पहिले अङ्क य को दस स्थानीय अङ्क माने तो उस का अर्थ य दहाइयां वा १० य होगा ॥
और य+१ इस दूसरे अङ्क को एक स्थानीय अङ्क माना तो प्रश्न के अनुसार (य+२) (य-३) ॥

तीसरे और चौथे अङ्कों का यात १० य+य+१ के तुल्य होगा ॥ वा (य+२) (य+३) = १० य+य+१ गुणा करके कोष्ठ को भिन्ना दिया य+५ य+६ = ११ य+१ ॥

पक्षान्तरा नयन और योग करने से ॥

$$य - ६ य = - ५$$

पूर्णवर्ग करने से

$$य - ६ य + ८ = ८ + ५ = ४$$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो

$$य - ३ = \pm २$$

पक्षान्तरा नयन से य = ३ \pm २ = ५ वा १

इस कारण जो य का मान ५ मानो तो ५, ५+१,

५+२, और ५+३ अर्थात् ५, ६, ७ और ८ ये चार अङ्क हुए कारण यह है कि ५६ = ७ × ८ और जो य का मान १ मानो तो १, १+१, १+२, १+३ अर्थात्

१, २, ३, और ४ इन्हें अङ्क हुए क्योंकि १२ = ३ × ४ ॥

(१) २० पुरुष और स्त्रियों ने पुण्यार्थ ३) इकट्ठे कि

ये जिसमें सब पुरुषों ने मिल कर दगावर देकर १॥

इकट्ठा किया और सब स्त्रियों ने मिल कर बगावर देकर

१॥ इकट्ठा किया परन्तु पुरुष ने स्त्री की अपेक्षा ११ मान

अधिक दिया तो बतलाओ कि कितने पुरुष थे और कितनी स्त्रियां ॥

कल्पना करो कि य स्त्रियों की संख्या है और र इतने आने एक स्त्री ने दिये तो जैसे सब पुरुष और स्त्री मिलकर २० हैं इस कारण २० में से य स्त्रियों की संख्या निकाल डाली तो शेष २०—य यह पुरुषों की संख्या हुई और पुरुष ने स्त्री से १ आना अधिक दिया है इस लिये $र + १$ इतने आने एक पुरुष ने दिये होंगे ॥

इस कारण य र इतने आने सब स्त्रियों ने दिये होंगे और $(२०—य)(र+१)$ इतने आने सब मनुष्यों ने दिये होंगे और प्रश्न के अनुसार सब स्त्रियों ने मिलकर सर्वधन ३) वा ४०० आने के साथ २४ आने दिये और सब पुरुषों ने भी मिलकर २४ ही आने दिये ॥

इस लिये $यर = २४$ इन में य और र शिष्टों $(२०—य)(र+१) = २४$ का मान बताओ ॥

दूसरे समीकरण में गुणा करने से

$$२०र + २०—यर—य = २४$$

और इस समीकरण में र के स्थान में $\frac{२४}{य}$ यह मान जो पहिले समीकरण से निकाला रख दिया ॥ तो

$$२० \times \frac{२४}{य} + २० - २४ - य = २४$$

$$\text{वा } \frac{४८०}{य} - ४ - य = २४$$

पक्षान्तरानयन से $\frac{४८०}{य} - य = २८$ ॥

य से गुणा किया तो $४८० - य^२ = २८य$

पक्षान्तरा नयन से $४८० = य + २८य$

वा $य + २८य = ४८०$

पूर्ण वर्ग करने से $य + २८य + (१४)^2 = ४८० + १९६ = ६७६$

दोनों पक्षों का मूल लिया तो $य + १४ = \pm २६$

पक्षान्तरा नयन से $य = \pm २६ - १४ = १२$ वा -४०

और $२० - य = २० - १२ = ८$ वा $२० - (-४०) = ६०$

$$\text{और } २ = य = \frac{२४}{२०} = २ \text{ वा } \frac{२४}{६०} = \frac{२४ \div ८}{६० \div ८} = \frac{-३}{५}$$

$$\text{और } २ + १ = ३ \text{ वा } \frac{३}{५}$$

इस कारण १२ स्त्रियों की संख्या हुई और हर एक को २ ज्ञाने दिये और ८ पुरुषों की संख्या है ॥ -

और हर एक पुरुष ने ३ ज्ञाने दिये ॥

पूर्व समीकरणों में जो य और र अव्यक्त राशियों के अणु मान लिये हैं उन को प्रश्न के उत्तर निकालने में मत लो ॥

॥ ८ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

(१) १, २, ३, आदि गिन्ती के ऐसे दो अंक निकालो जिन का घात १५६ के तुल्य हो ॥

(२) गिन्ती के ऐसे तीन अंक निकालो जिन का योग पहिले दो अंकों के तुल्य हो ॥

(३) २० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड दूसरे खंड के वर्ग के तुल्य हो ॥

(४) २१० के ऐसे दो खंड करो कि एक खंड का वर्ग दूसरे खंड के तुल्य हो ॥

(५) २५ के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के

वर्गों का योग ३१३ हो ॥

(६) ३० के ऐसे दो खंड करो कि उन दोनों खंडों के वर्गों का अन्तर ३०० हो ॥

(७) दो ऐसी संख्या हैं कि उन का घात २४४ है और जो हर एक संख्या में २ जोड़ दिया जाय तो उन का घात २०० हो जाय तो बतलाओ कि वे कौन सी दो संख्या हैं ॥

(८) ऐसी संख्या निकालो कि उसके वर्ग और संख्या में २५६ का अन्तर हो ॥

(९) ऐसा भिन्न बताओ कि वह अपने वर्ग से $\frac{1}{4}$ के अनुमान बढ़ा हो ॥

(१०) आंगरे से कासी जी तक दो आंगरेजों की खड़खड़िये की डाक बैठी और वे दोनों आंगरेज एक ही समय में सवार हुए परंतु एक खड़खड़िये में जो घोड़े अदला बदली से लगे वे दूसरे खड़खड़ियों के घोड़ों से हर एक घंटे में १ मील सिवाय चले और जब आगलाखड़ खड़िया २५६वें मील के पत्थर तक पहुंचा तो बतलाओ कि हर एक खड़खड़िया हर एक घंटे में कितने मील चला होगा ॥

(११) एक बङ्गाली प्रातः काल के समय में ताज गंज के सिकन्दरे की ओर बग्गी पर बैठकर ६ मील गया परंतु लौटते बेर पैदल आया और बग्गी पीछे २ चली आई जब उसने घड़ी देखी तो आलम हुआ कि जो समय उसे जानने में लगा था उसे लौटते में ५० मिनट सिवाय बगे और उसने जब अपनी लौटने की चाल को

बग्घी की चाल से मिलाया तो मालूम हुआ कि उसके एक घंटे के चलने में और बग्घी के एक घंटे के चलने में ५ मील का अन्तर पड़ता है तो बतलाओ कि बग्घी एक घंटे में कितने मील चली ॥

(१२) एक दयावान मनुष्य ने ६॥ बराबर लागत की मोटी मिस्त्राड़ियां बनवाकर दीन मनुष्यों को बांट दीं और ऐसे ही दूसरे दयावान दातने ६॥ की मिस्त्राड़ियां बनवाकर दीन लोगों को बांट दीं परन्तु पहिले दयावान मनुष्य ने जो लागत एक मिस्त्राड़ के बनवाने में लगवाई थी उसे एक जाने कम लागत की मिस्त्राड़ दूसरे दयावान मनुष्य ने बनवाई इस कारण इसने पांच और अधिक दीन मनुष्यों को मिस्त्राड़ दीं तो बतलाओ कि पहिले दयावान मनुष्य ने दीनों को मिस्त्राड़ बांटी और दूसरे दयावान ने कितने मनुष्यों को मिस्त्राड़ दी ॥

(१३) कई मनुष्य बराबर हिस्से के सामी थे उनको ४५) रुपये नफ़्फ़ के मिले तो उन्होंने बराबर बांटे लिये फिर उनमें ६) सामी निकल गए फिर भी बाकी सामियों को ४५) नफ़्फ़ के मिले जब उन्होंने इस धन को बांटा तो हर एक को पहिले से ७) = पाई अधिक मिली तो बतलाओ कि पहिले सब कितने सामी थे और हर सामी को सब कितना नफ़्फ़ मिला और जब ६) सामी निकल गए तो हर सामी को सब कितना नफ़्फ़ मिला ॥

(१४) सड़क के किनारे आगे और कान्हपुर दो

नगरों के बीच १०० मील का अन्तर था जिस दिन एक नगर से एक मनुष्य दूसरे नगर को चला उसी दिन दूसरे नगर में एक मनुष्य पहिले नगर को चला और पहिले नगर का मनुष्य दूसरे मनुष्य की अपेक्षा ६ मील हर रोज अधिक चलता और जितने दिन पीछे वे दोनों मनुष्य एक दूसरे में मिले उतने दिनों की संख्या से दूने मील दूसरा मनुष्य चलता था तो बतलाओ कि हर एक मनुष्य कितने मील रोज चलता होगा ॥

(१५) सेज गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियों से छोटे होते हैं जब सेज गाड़ी २०० गज चली तो इस बीच में अगले पहियों ने पिछले पहियों की अपेक्षा ६ बार अधिक चक्कर किया परन्तु एक और सेज गाड़ी थी कि उसके पहियों का घेर पहिले सेज गाड़ी के पहियों के घेर से एक गज बड़ा था और जब यह सेज गाड़ी २०० गज चली तो उसके अगले पहिये पिछले पहियों से ४ बार अधिक घूमें तो बतलाओ कि पहिली सेज गाड़ी के अगले पहियों का कितना घेर था और पिछले का कितना ॥

॥ सभीकरण सम्वन्धी व्याख्या ॥

७२ प्र० जब सभीकरण के दोनों पक्षों में भिन्न पद हों और उनके ह्रास में केवल अङ्क हों जैसे ॥

$\frac{५}{३} + \frac{५}{४} + \frac{५}{२} + \frac{५}{२} = १७$ तो ऐसे सभीकरणों में य
आवृत्त शक्ति का अङ्क गणित की रीति से भिन्न का
सम्यक् स्वरूप काले से मिलेगा और विद्यार्थी को

यह अवश्य चाहिये कि वह पहिले भङ्ग गणित अच्छी
 रीति से सीखलें तिस पीछे बीज गणित का आरम्भ क
 रें क्योंकि बीज गणित में बहुतेरी जगह ऐसे प्रश्न आ
 न पड़ते हैं कि उनका उत्तर बिना भङ्ग गणित ज्ञान के
 उनसे नहीं निकल सकेंगे ॥

जैसे $\frac{y}{5} + \frac{y}{8} + \frac{y}{3} - \frac{y}{2} = 10$ इसमें y का मान बनाओ

क्योंकि $\frac{y}{5} = y \cdot \frac{1}{5}$, $\frac{y}{8} = y \cdot \frac{1}{8}$, $\frac{y}{3} = y \cdot \frac{1}{3}$ और $\frac{y}{2} = y \cdot \frac{1}{2}$

इसलिये $y \cdot \frac{1}{5} + y \cdot \frac{1}{8} + y \cdot \frac{1}{3} - y \cdot \frac{1}{2} = 10$ ॥

वा य $(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = 10$ ॥

इस कारण य = $\frac{10}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$

y का मान जो लिखा है इसका लघुतम रूप केवल भङ्ग
 गणित की रीति से क्रिया करने से हो जायगा ॥

७३॥ बहुधा जब सभी कार्यों के उदाहरणों में भिन्न
 पद होते हैं तो छेद गण क्रिया के स्थान में ऐसी क्रिया
 करने हैं जो नीचे उदाहरणों पर ऊई है इससे सहज
 पड़ता है ॥

(१) $\frac{2y-8}{22} + \frac{y-2}{11y-5} = \frac{2y}{7}$ इसमें y का मान बनाओ

क्योंकि $\frac{2y-8}{22} = \frac{2y}{22} - \frac{8}{22} = \frac{1y}{11} - \frac{4}{11}$

* ११ और ११ प्रक्रम ॥

+ ११ प्रक्रम ॥

$$\text{दूसर लिये } \frac{२५}{७} - \frac{४}{३१} + \frac{५-२}{५५-६} = \frac{२५}{७}$$

$$\text{शोधन और पक्षान्तर नयन से } \frac{५-२}{५५-६} = \frac{४}{३१}$$

३१ (५५-६) से गुणा करो तो

$$३१५ - ४२ = २०५ - २४$$

पक्षान्तर नयन और योग करने से य = २८

७४॥ दो वर्ण समीकरण में एक वर्ण शोधन के लिये एक वर्ण का प्रक्षर के गुणों का लघु समापवर्त्य निका लते हैं परंतु बहुधा दो वर्ण समीकरण में अव्यक्त राशि यों का मान बिना लघु समापवर्त्य निकालने के मिल जाता है इस रीति को दिखाते हैं ॥

। ५५ प्रक्रम का दूसरा उदाहरण लिखते हैं ।

$$\left. \begin{array}{l} (२) ५४५ - २२१२ = १५ \\ ३६५ - ७७२ = २१ \end{array} \right\} \text{य और र का मान बताओ ॥}$$

$$\text{अन्तर करने से } १८५ - ४४२ = -६$$

$$२ \text{ से गुणा किया तो } ३६५ - ८८४ = -१२$$

$$\left. \begin{array}{l} ३६५ - ८८४ = -१२ \\ ३६५ - ७७२ = २१ \end{array} \right\} \text{दूसरा समीकरण ॥}$$

$$\text{अन्तर करने से } ११२ = ३३$$

$$११ \text{ का भाग देने से } २ = ३$$

$$\text{और } १८५ = ४४२ - ६ = १३२ - ६ = १२६$$

$$१८ \text{ का भाग देने से } ५ = \frac{१२६}{२४} = ७$$

। ५५ प्रक्रम के प्रश्नों का १६ प्रश्न लिखते हैं ।

$$\left. \begin{array}{l} १०१५ - २४२ = ६३ \\ १०३५ - २८२ = २६ \end{array} \right\} \text{य और र का मान बताओ ॥}$$

अन्तर करने से २५ - ४२ = -३४

६ से गुणा किया १२५ - ३४२ = -२०४

और १०१५ - २४२ = ६३

अन्तर करने से ८६५ = २६०

८६ का भाग देने से $y = \frac{२६०}{८६} = ३$

और ४२ = ३५ + ३४ = ४०

४ का भाग देने से $r = \frac{४०}{४} = १०$ ॥

॥ अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

$५७५ - ३४२ = २६$
 $५४५ - ३५२ = ९३$ } य और र का मान बताओ ॥

उत्तर $y = ८$ और $r = १०$

सम्बन्ध अनुपात ध्रुव राशि और चतु राशि परिभाषा
जब समान जाति की एक बड़ी राशि और छोटी राशि में
यह सम्बन्ध ढूँढते हैं कि बड़ी राशि में छोटी राशि कितनी
है तो इन छोटी राशियों की संख्या को पूर्व दोनों बड़ी
छोटी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं वा जब सजातीय छोटी
राशि और बड़ी राशि में यह सम्बन्ध देखते हैं कि छोटी
राशि बड़ी राशि का कौन सा भाग है तो इस भाग को छोटी
बड़ी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं इस परिभाषा से यह
ज्ञान पड़ता है कि जब दो राशियों में सम्बन्ध ढूँढना हो
तो पहिली राशि में दूसरी राशि का भाग दो जो लब्धि मिले
वही इस सम्बन्ध होगा जैसे बताओ कि ८ और ३
में क्या सम्बन्ध है तो $८ \div ३ = २$, यही ३ का अर्द्ध ८ और ३

का सम्बन्ध ज्ञाया इसे यह जाना जाता है कि ८ में ३ नी
न बार है ॥

ऐसे ही ३ और ८ में सम्बन्ध बताओ तो $३ \div ८ = \frac{३}{८}$ ॥

यही ३ और ८ में सम्बन्ध ज्ञाया इसे यह जान पड़
ता है कि ८ का ३ वतीयांश है ॥

ऐसे ही $\frac{३}{८}$ इसे अ और क इन दो राशियों का सम्ब
न्ध जाना जाता है अ और क के स्थान में चाहे जो
संख्या मान लो ओ जो क से अ बड़ा हो वा अ > क तो
 $\frac{अ}{क}$ इस का अर्थ है कि अ में क इस का भाग $\frac{अ}{क}$ बार

जाता है और जो क से अ छोटा हो वा अ < क तो $\frac{अ}{क}$
इस का यह अर्थ है कि क में अ, ऐसे $\frac{अ}{क}$ इतने भाग हैं

जब अ और क दो राशियों का सम्बन्ध लिखना हो
ता है तो अ: क वा $\frac{अ}{क}$ या लिखते हैं इस लिये अ: क =
 $\frac{अ}{क}$ वा अ: क और $\frac{अ}{क}$ इन दोनों का एक ही अर्थ है ॥

ऐसे ही ग: घ = $\frac{ग}{घ}$ जो अ और क इन दो राशियों का
सम्बन्ध और ग और घ इन दो राशियों का सम्बन्ध स
मान हो वा अ: क = ग: घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ तो ॥

ऐसे दो सम्बन्धों की समता को अनुपात कहते हैं और
इस के लिखने की यह रीति है जैसे अ: क: ग: घ इस
को ये पढ़ते हैं जो अ और क में सम्बन्ध है वही ग
और घ में सम्बन्ध है क्योंकि $\frac{३}{८} = \frac{३}{८}$ ॥

इस लिये २: ३: ४: ६ वा २ और ३ में जो सम्बन्ध है
वही ४ और ६ में सम्बन्ध है और २, ३, ४, और ६ इन
को अनुपातीय अवयव कहते हैं ॥

विद्यार्थी को चाहिये कि जब दो राशि में सम्बन्ध हो तो

उस का भिन्न रूप कर ले वही सम्बन्ध का मापक होगा जैसे
 ग और क इन का सम्बन्ध गः क वा $\frac{3}{4}$ है और जो अनु
 पात हो तो उस के समीकरण का रूप कर लो जैसे गः कः
 गः घ इसको $\frac{3}{4} = \frac{7}{8}$ यों लिखने हैं ॥

सम्बन्ध का जो भिन्न रूप कर लेते हैं उसे जो क्रिया भि
 न्न पर हो सकती है वह सम्बन्ध पर भी हो सकती है और
 भिन्न सम्बन्धी क्रियाओं का वर्णन हो ही चुका है ऐसे ही
 अनुपात को जो समीकरण के रूप में लिखते हैं उसे स
 मीकरण सम्बन्धी क्रिया अनुपात पर हो सकती है ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ७:४ यह एक सम्बन्ध है और ८:५ यह दूसरा
 सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है

७:४ इस सम्बन्ध का $\frac{7}{4}$ मापक है ॥

८:५ इस सम्बन्ध का $\frac{8}{5}$ मापक है ॥

$\frac{7}{4}$ और $\frac{8}{5}$ इन के हों का सम्बन्ध देखें कि सा ॥ तो

इन भिन्नो का $\frac{35}{20}$ और $\frac{32}{20}$ यह स्वरूप हुआ और $\frac{35}{20}$

$\frac{35}{20} + \frac{3}{20}$ इस लिये $\frac{35}{20}$ वा $\frac{7}{4}$ $\frac{32}{20}$ वा $\frac{8}{5}$ से बड़ा है अ

र्थात् ७:४ > ८:५ ॥

७६॥ जो सम्बन्ध के दोहों वहाँ को एक राशि से गुणा करें वा उनमें किसी एक राशि का भाग दें तो सम्बन्ध का मान ज्यों का त्योही बना रहेगा ॥

जैसे अः क यह एक सम्बन्ध है ॥

अः क = $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ ७५ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

और $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{म अ}}{\text{म क}}$ ७४ वें प्रक्रम के अनुसार ॥

इसलिये अः क = $\frac{\text{म अ}}{\text{म क}} = \text{म अ} : \text{म क} ॥$

उत्क्रम से म अ : म क = $\frac{\text{म अ}}{\text{म क}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \text{अ} : \text{क} ॥$

॥ उदाहरण ॥

२ : ३ = ४ : ६, ५ : २ = १५ : ६, ५ : २० = ५०

७७ जो अः क : ग : च तो अ च = क ग और जो ॥

अ च = क ग तो अः क : ग : च ॥

क्योंकि अः क : ग : च वा $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{च}}$ इन तुल्य राशियों को

क च से गुणा किया तो $\frac{\text{अ क च}}{\text{क}} = \frac{\text{ग क च}}{\text{च}} ॥$

परन्तु अ क च = क. अ च और ग क च = च क ग

इसलिये $\frac{\text{क अ च}}{\text{क}} = \frac{\text{च. क ग}}{\text{च}}$ वा अ च = क ग

जो अ च = क ग तो इन तुल्य राशियों में क च का भाग

३० प्रक्रम ॥

दिधातो $\frac{अ घ}{क घ} = \frac{क ग}{च}$ वा अः कः गः घ ॥

इस कारण जो अनुपात के तीन पद मालूम हों तो उन से शेष चौथा पद भी मालूम हो जायगा ॥

जैसे जो अः कः गः घ तो पूर्व रीति से अघ = कग अ का भाग देने से य = $\frac{क ग}{अ}$ यह त्रैराशिक की उपपत्ति हुई और त्रैराशिक की रीति से जो तीन पद अनुपात के जाने हुए रहते हैं तो उन से चौथा पद मिल जाता है ॥

७८ जो अः कः गः घ तो क अघः ग क्योंकि अः कः

गः घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को क घ से गुणा

किया तो अ घ = क ग इन राशियों में अ ग इस का भा

ग दिया तो $\frac{अ घ}{अ ग} = \frac{क ग}{अ ग}$ वा $\frac{घ}{ग} = \frac{क}{अ}$

वा $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$ इस लिये

कः अः घः ग ॥

७९ जो अः कः गः घ तो अः गः कः घ ॥

क्योंकि अः कः गः घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

इन राशियों को $\frac{क}{ग}$ से गुणा किया तो $\frac{क अ}{ग क} = \frac{क ग}{ग घ}$

वा $\frac{अ क}{ग घ} = \frac{क ग}{ग घ}$ वा $\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$ इस लिये अः गः कः घ

८० जो अः कः गः घ तो अ + कः कः ग + घः घ

+ ३३ प्रक्रम ॥ ३५ प्रक्रम ॥ + ७५ प्रक्रम ॥

+ ३५ प्रक्रम ॥

क्योंकि अः कः गः घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

इन राशियों में १ जोड़ा तो $\frac{अ}{क} + १ = \frac{ग}{घ} + १$ वा $\frac{अ+क}{क}$
 $= \frac{ग+घ}{घ}$ इसलिये अ+कः कः ग+घः घ ॥

८१ जो अः कः गः घ और गः घः चः ज तो अः कः चः ज

क्योंकि अः कः गः घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

गः घः चः ज वा $\frac{ग}{घ} = \frac{च}{ज}$

इसलिये $\frac{अ}{क} = \frac{च}{ज}$ कारण यह है कि ये दोनों राशि $\frac{ग}{घ}$ के

तुल्य हैं इसलिये अः कः चः ज ॥

८२ जो अः कः गः घ और कः चः घः ज तो अः चः गः ज

क्योंकि अः कः गः घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ ॥

और कः चः घः ज वा $\frac{क}{च} = \frac{घ}{ज}$

इसलिये $\frac{अ}{क} \times \frac{क}{च} = \frac{ग}{घ} \times \frac{घ}{ज}$

वा $\frac{अ}{कच} = \frac{ग}{घज}$

वा $\frac{अ}{च} = \frac{ग}{ज}$ इसलिये अः चः गः ज ॥

॥ रेखा गणित के पाँचवें अध्याय में जो अनुपात की परिभाषा लिखी है वह यह है ॥

परिभाषा जो चार राशि हों और उनमें पहिली और तीसरी राशि एक ही राशि से गुणी जाय और दूसरी और चौथी राशि भी किसी एक राशि से गुणी जाय और जो

३७५ प्रक्रम ॥

* ३५ प्रक्रम ॥

+ ३५ प्रक्रम

३५ प्रक्रम ॥

पहिली राशि का घात, दूसरी राशि के घात से बड़ा हो
और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से
बड़ा हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के घा
त के तुल्य हो ॥

और तीसरी राशि का घात भी चौथी राशि के घात से
तुल्य हो वा जो पहिली राशि का घात दूसरी राशि के
घात से छोटा हो और तीसरी राशि का घात भी चौथी
राशि के घात से छोटा हो तो पहिली दूसरी तीसरी औ
र चौथी राशि अनुपातीय होंगी ॥

जो बीज गणित की परिभाषा के अनुसार चार अनु
पातीय राशि हों तो वे राशि रेखा गणित की परिभाषा
के अनुसार भी अनुपातीय होंगी ॥

जैसे जो अ. क. ग. और घ ये अनुपातीय राशि हों
तो $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को $\frac{म}{न}$ राशि से गुणा कि
या तो $\frac{म}{न} \cdot \frac{अ}{क} = \frac{म}{न} \cdot \frac{ग}{घ}$ ॥

या $\frac{म अ}{न क} = \frac{म ग}{न घ}$ भिन्न के गुण से यह जान पड़ता है
कि जो $म अ > न क$ तो $म ग > न घ$ और जो $म अ = न क$
तो $म ग = न घ$ और जो $म अ < न क$ तो $म ग < न घ$
और पहिली और तीसरी राशि अ और ग को म
से गुणा किया तो म अ और म ग यह घात हूँ और
दूसरी और चौथी राशि क और घ को न से गुणा कि
या तो न क और न घ यह घात हूँ इस कारण रेखा
गणित की परिभाषा के अनुसार भी अ. क. ग. और
घ ये चार राशें अनुपातीय हूँ ॥

८४ जब एक राशि के कई जुड़े मान होते हैं तो ऐसी राशि को चल राशि कहते हैं और जो एक राशि का एक ही मान हो तो ऐसी राशि को ध्रुव राशि कहते हैं जब दो राशियों में ऐसा सम्बन्ध होता है कि जितनी गुनी एक राशि बढ़ जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि बढ़ जाय वा जितनी गुनी एक राशि घट जाय उतनी ही गुनी दूसरी राशि घट जाय तो ऐसे परस्पर सम्बन्ध को क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे एक मजदूर जो रोज़ पाता हो और वह अधिक दिन काम करें तो उसे उसी परिमाण से दाम भी सिवाय मिलेंगे और जो वह थोड़े दिन काम करेगा तो उसे उसी परिमाण से दाम भी कमती मिलेंगे इसलिये राम और दिनों के बीच क्रम रूपान्तर होगा ॥

ऐसे ही अ और क जो दो ऐसी राशि हों कि उन के बीच क्रम रूपान्तर हो और जो अ राशि ग के समान हो जाय और क राशि घ राशि के समान तो अ:क::क:घ

बहुधा दो राशि में ऐसा परस्पर सम्बन्ध रहता है कि जो एक राशि घट बढ़ जाय तो दूसरी राशि भी अवश्य घट बढ़ जायगी परन्तु उन दोनों राशियों के बीच क्रम रूपान्तर न हो जैसे वर्ग क्षेत्र में जो भुज घट बढ़ जाय तो वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल भी अवश्य घट बढ़ जायगा परन्तु भुज और क्षेत्रफल के बीच क्रम रूपान्तर न होगा कारण यह है कि जो वर्ग क्षेत्र की भुज घटती हो जाय तो क्षेत्रफल चौगुना हो जायगा ॥

जैसे जो भुज का मान २ है तो क्षेत्रफल ४ होगा और

जो भुज का मान २० २ वा ४ हो तो ४×४ वा १६ क्षेत्रफल होगा ऐसे ही जो भुज तीन गुनी हो जाय तो क्षेत्रफल नौ गुना हो जायगा जैसे जो भुज का मान ३×२ वा ६ हो तो ६×६ वा ३६ क्षेत्रफल होगा ॥

जब दो राशियों के बीच ० = ऐसा चिन्ह देखा तो जानो कि दोनों राशियों का रूपान्तर होता है ॥

॥ उदाहरण ॥

र ० = य और जो य = २ और र = २० तो अनुपात बनाने जब र का मान २० है तब य का मान २ है और य और र के बीच क्रम रूपान्तर होता है ॥

इस लिये र : २० :: य : २ वा र : य :: २० : २
वा र : य :: १० : १

८५ परिभाषा जब किसी राशि का २ में भाग देते हैं तो उस भिन्न को व्यस्त राशि कहते हैं जैसे जो ३ एक राशि हो तो $\frac{३}{२}$ व्यस्त राशि होगी और राशि और व्यस्त राशि में ऐसा सम्बन्ध रहता है कि जो राशि जे गुनी बढ़ जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी घट जायगी और जो राशि जे गुनी घट जाय तो व्यस्त राशि उतनी ही गुनी बढ़ जायगी जैसे ४ संख्या है इस की $\frac{१}{४}$ व्यस्त संख्या हुई जो ४ के स्थान में दो गुना ४ वा २×४ वा ८ संख्या हो तो चौथाई का आधा अर्थात् $\frac{१}{२} \times ४$ वा $\frac{१}{२}$ व्यस्त संख्या होगी और यह चौथाई का आधा है और जो चार के स्थान में ४ का आधा अर्थात् $\frac{१}{४}$ वा २ रखता जाय तो चौथाई का दूना $\frac{१}{४} \times २$ वा $\frac{१}{२}$ व्यस्त संख्या होगी

* ७८ प्रक्रम ॥

+ ७६ प्रक्रम ॥

और यह चौथाई दूनी है इस लिये जब दो राशियों में
ऐसा सम्बन्ध होता है कि जब एक राशि में गुनी घट जा-
य तो दूसरी राशि उतनी ही गुनी घट जाय और जो
पहिली राशि में गुनी घट जाय तो दूसरी राशि भी उत-
नी ही बढ़ जाय तो उसे उत्क्रम रूपान्तर कहेंगे ॥

जैसे अ और क इन का उत्क्रम रूपान्तर होता है तो
इस को अ० = क या लिखते हैं जो अ का स्वरूप म हो
जाय और क का स्वरूप घ तो अ: ग :: क: घ ॥

इस अनुपात की तीसरी और चौथी राशियों को
क घ से गुणा* तो अ: ग :: घ: क ॥

जो कोई दौराह जल्दी से चिढ़ी ले जाता हो और जित-
ने समय में वह चिढ़ी पड़नेवा देगा उस समय में और
उस की शीघ्रता में उत्क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो
वह मनुष्य दूनी जल्दी चले तो वह पूर्व समय की अपे-
क्षा आधे समय में पड़नेवा और ऐसे जो वह धीरा च-
लने लगे तो उस को चिढ़ी पड़ने में अधिक सम-
य लगेगा ॥

॥ उदाहरण ॥

र और य में उत्क्रम रूपान्तर है वा० = $\frac{3}{2}$
जो य = ३ और र = २ तो अनुपात यतात्रो

र: २ :: $\frac{3}{2}$: ३ वा० र: $\frac{3}{2}$:: २: ३

वा० र: $\frac{3}{2}$:: ३: २

८६ दो राशियों के घात और तीसरी राशि के बीच की क्रम रूपान्तर होता है ॥

जैसे जो मजदूर जितने आने रोज़ पाता हो उन आने को जितने दिन वह काम करे उस में गुणा कर दे तो उस घात और उस के सब दामों में क्रम रूपान्तर होगा क्योंकि जो पूर्व घात दूना हो जायगा तो उस के दाम भी दूने हो जायगे और घात से रीति से दूना हो सकता है कि तो दिन दूने हो जाय वा एक दिन की मिहनत के दूने दाम हो जाय जैसे जो एक मजदूर २ आने रोज़ पाता हो और वह ४ दिन काम करे तो उस के सब दाम ४×२ वा ८ आने हुए जो वह ४ आने रोज़ पाने लगे तो वह ४ दिन में ४×४ वा १६ आने कमा लेगा वा जो यह हो ही आने रोज़ पाते परंतु ८ दिन काम करे तो भी वह ८×८ वा ६४ आने कमावेगा ॥

ऐसे ही अ और क ग इन में क्रम रूपान्तर है वा अ० = क ग जो अ का स्वरूप घ हो जाय और क ग का स्वरूप च ज तो अः घः क गः च ज ॥

॥ उदाहरण ॥

ल० = यर जो य = १२ = २ और ल = २० तो अतुपात वतः

लः २० :: यरः २×२ इस लिये* लः यरः

२० : २ वा लः यरः २० : २

८७ जो दो चल राशियों परस्पर क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध हो और उन दोनों राशियों के मान व्यक्त हों तो

रूपान्तर का समीकरण स्वरूप हो सकता है ॥

जैसे जो $अ ० = क$ और $अ = ग$ और $क = घ$ तो $अ :$
 $ग :: क : घ$ इस लिये $अ घ = ग क$ घ का भाग देने से

$$अ = \frac{ग क}{घ} = \frac{ग}{घ} . क ॥$$

॥ उदाहरण ॥

$र ० = य$ और $य = १$ और $र = ३$ तो $य$ और $र$ के बीच
समीकरण बनाओ ॥

$र : ३ :: य : १$ इस लिये $३ र = ३ य$

जब $अ$ और $क$ दो राशि में क्रम रूपान्तर हो तो $\frac{अ}{क}$
यह सम्बन्ध सदा एकसा बना रहेगा क्योंकि यह तो हम
लिख ही चुके हैं कि जो भिन्न के अंश और हर को एक
राशि से गुणा करें वा उन में किसी एक राशि का भाग दे
तो भी भिन्न के मान में कुछ अन्तर न पड़ेगा अर्थात् $\frac{अ}{क}$
ध्रुव राशि होगी यह $अ$ और $क$ इन के क्रम रूपान्तर
से न बदलेगी इस कारण $\frac{अ}{क}$ इस के स्थाव में म.प.
वा न कोई एक अक्षर रख देते हैं ॥

जैसे $\frac{अ}{क} = म$ वा $अ = म क$ ॥

जो $ग$ और $घ$ के बीच क्रम रूपान्तर हो वा $ग ० = घ$
तो $\frac{ग}{घ}$ यह ध्रुव राशि ही बनी रहेगी परन्तु $ग$ और $घ$
के रूपान्तर होने से $\frac{ग}{घ}$ यह राशि $\frac{अ}{क}$ राशि के समान न
हो जायगी इस लिये $\frac{ग}{घ}$ को न के समान मान लेंगे और
उसे $म$ के समान न मानेंगे क्योंकि $म = \frac{अ}{क}$ इस कारण
गुणा करने से $ग = न घ$ ॥

॥ उदाहरण ॥

दो राशियों के योग और राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और जिन राशियों का योग है उनमें से एक राशि और य राशि के बीच क्रम रूपान्तर है और दूसरी राशि और य इन के बीच क्रम रूपान्तर है तो इस क्रम रूपान्तर सम्बन्ध का समीकरण स्वरूप करो ॥

कल्पना करो कि $\frac{\text{योग की एक राशि}}{य} = म \text{ और}$

योग की दूसरी राशि $\frac{य}{य} = न म \text{ और न ध्रुव राशि है इस ल}$

ये गुण करने से योग की एक राशि = मय और योग की दूसरी राशि = न य और कल्पना करो कि $\frac{मय + नय}{र}$
 = य यह ध्रुव राशि है इस कारण गुण करने से यय + नय = यर यही इस समीकरण हुआ ॥

तो य और र दोनों राशियों के दोहरे मान मालूम हो जाय तो म और न ध्रुव राशियों के मान भी मालूम हो जायगे ॥

॥ २० अभ्यास के लिये प्रश्न ॥

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| (१) ३ अः १५ अ ॥ | (७) अ प गः ३ अ ग य ॥ |
| (२) २ यः १० य ॥ | (८) ३ यः १२ य ॥ |
| (३) अ यः क य ॥ | (९) अ ग + क गः ग ॥ |
| (४) अ क गः क ग ॥ | (१०) २ अ य + यः य य ॥ |
| (५) अ य रः २ य ॥ | (११) १ यः २ य ॥ |
| (६) ३ अ क यः २ अ य ॥ | (१२) अ-कः अ + क ॥ |

॥ नीचे जो सम्बन्ध लिखे हैं उनका लघुतम रूप करो ॥

(१३) ५ अ यः ४ य ॥

(१६) २ अ रः $\frac{1}{2}$ य ॥

(१४) १६ अ रः २० य ॥

(१५) $\frac{1}{2}$ अ यः $\frac{3}{4}$ क य ॥

(१७) $\frac{७ अ य र}{१ \times २ \times ३} : \frac{५ अ र}{२ \times ३ \times ४}$

(१८) $\frac{न (न-१)}{१ \times २}$ अ यः $\frac{३}{२}$ अ य ॥

(१९) १५: १६ यह एक सम्बन्ध है और १६: १७ दूसरा सम्बन्ध है तो बतलाओ कि इन में कौन सा सम्बन्ध बड़ा है ॥

(२०) जो यः रः २: १ तो बतलाओ कि २ अ य ३ क र यह संबन्ध वा ३ अः २ क यह सम्बन्ध बड़ा होगा ॥

(२१) जो अः कः १ गः घ तो बतलाओ कि २ अः ३ कः २ गः ३ घ ॥

(२२) जो अः कः १ कः ग तो बतलाओ कि अः गः १ अः क ॥

(२३) अः अ + यः १ अ - यः क इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२४) यः रः १ रः २ अ - अ इस अनुपात का समीकरण स्वरूप करो ॥

(२५) जो अ + यः अ - यः ११: ७ तो अः य इस सम्बन्ध का मान बताओ ॥

(२६) ऐसी दो संख्या बतलाओ कि उन का सम्बन्ध २: ३ इस सम्बन्ध के तुल्य मान हो और इन के योग और घात में जो सम्बन्ध हो वह ५: १२ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२७) प्र य ३ ग य और $\frac{१}{३}$ के अनुपात के पहिले तीसरे और चौथे पद हैं तो बतलाओ कि अनुपात का दूसरा कौन सा पद है ॥

(२८) दो कौन सी संख्या हैं कि उन का सम्बन्ध २:३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो और जो उन दोनों संख्याओं में ५ जोड़ा जाय तो उन का सम्बन्ध ४:५ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(२९) जो $० = य$ और $य = २$ और $२ = ४$ प्र तो य और २ के बीच समीकरण बनाओ ॥

(३०) जो $० = \frac{१}{२}$ और $य = \frac{१}{३}$ और $२ = ४$ प्र तो य और २ के बीच समीकरण बनाओ ॥

(३१) जो $२ + य = ० = १ - य$ प्र तो बतलाओ कि $१ + य = ० = य$ ॥

(३२) जो $२ य + ३ र = ४ य + ५ र$ प्र तो बतलाओ कि $य = २$ ॥

॥ योगज ओढ़ी और अंतर ओढ़ी ॥

(८८) परिभाषा ओढ़ी शब्द का अर्थ पङ्क्ति है जब एक पङ्क्ति में दशि इस क्रम से हो कि प्रत्येक दो पदों की राशियों के बीच समान अन्तर होतो ऐसी पङ्क्ति को ओढ़ी कहेंगे और ओढ़ी के पङ्क्ति पद को राशि पदवा गुण कहते हैं और सब से पहिले पद को अन्त पद कहते हैं और प्रत्येक दो राशियों के बीच जो समान अन्तर है उसे चय बोलते हैं और अन्त और अन्त पद के बीच मिलने पद हो उन्हें मध्य पद और पदों की संख्या को गच्छ और ओढ़ी के सब पदों

के योग को ओढ़ी फल कहते हैं ॥

जैसे १. २. ५. ७. ८. १२. आदि इस पङ्क्ति को योग में
की कहेंगे कों कि प्रत्येक दो पास के पदों में पहिला पद
दूसरे पद से २ के समान बड़ा है वा एक में जो २ जोड़े
तो ३ यह ओढ़ी का दूसरा पद हुआ ऐसे ही ३ में जो २
जोड़े तो ५ ओढ़ी का तीसरा पद हुआ ॥

२०, १८, १८, १७. इस पङ्क्ति को अन्तर ओढ़ी कहेंगे
कों कि प्रत्येक दो पास के पदों में पहिला पद दूसरे
पद से २ के समान छोटा है ॥

जो ओढ़ी का आदि पद समानो और च चय या
चो तो $अ. अ + च, अ + २च, अ + ३च$, आदि योग
ओढ़ी हुई और $अ. अ - च, अ - २च, अ - ३च$, आ-
दि अन्तर ओढ़ी हुई ॥

पहिली योगज ओढ़ी में क्रम से राशि के योग कर
ने से राशि बढ़ती चली जाती है और दूसरी अन्तर
ओढ़ी में क्रम से च राशि के घटाने से राशि घटती
चली जाती है ॥

अपने मन में तो विचारो कि १. ३. ५. ७. ८. आदि
ओढ़ी है वा नहीं विचारो पीछे नरुल मालूम होगा
कि ओढ़ी नहीं है कारण यह है कि एक और ३ के बीच
च २ का अन्तर है वा $३ - १ = २$ और ४ और ३ के
बीच १ का अन्तर है वा $४ - ३ = १$ इस लिये जो ओढ़ी
होती तो परिभाषा के अनुसार प्रत्येक दो पास की रा-
शियों के बीच एक ही सा अन्तर रहता ॥

अपने मन में तो विचार करो कि १. ५. ८. १२. १३.

आदि अेदी है वानही विचारते ही मालूम होगा कि
 अेदी है कारण यह है कि ५-१=४ और ८-५=३
 और ऐसे ही १३-८=५ और १७-१३=४ आदि
 अेदी की राशि क्रम से ४ के जोड़ने से बढ़ती चली
 जाती है ॥

(८८) अ. अ + च. अ + २ च. अ + ३ च आदि यो
 गज अेदी में अ आदि पद है. अ + च दूसरा पद है
 और अ + २ च तीसरा पद ऐसे ही और जानो। इस
 से यह बात निकलती है कि जो स को अेदी के किसी
 पद की संख्या मानो जैसे पहिला वा दूसरा वा तीसरा
 आदि तो सौंवा स्थान का पद अ + (स-१) च इस के
 तुल्य होगा कारण यह है कि जो स को १ मानो वा प
 हिला पद निकालना हो तो अ + (स-१) च इसमें
 सके स्थान में १ रखो तो अ पहिला पद हुआ क्योंकि

$$अ + (१-१) च = अ + ० च ॥$$

$$= अ + ० = अ ॥$$

जो स को २ मानो और दूसरा पद निकालना चाहे
 तो अ + (स-१) च इसमें स के स्थान में २ रखो
 तो अ + च यह दूसरा पद होगा ॥

$$\text{क्योंकि } अ + (२-१) च = अ + १ च = अ + च ॥$$

जो स को ३ मानकर तीसरा पद निकाला चाहो तो
 अ + (स-१) च इसमें स के स्थान में ३ रखने से अ +
 २ च तीसरा पद हुआ ॥

क्योंकि अ + (३-१) च = अ + २ च = अ + २ च ऐसे ही
 जो चौथा पांचवा आदि पद निकालने हों तो निकल लो

इसी रीति से अंतर श्रेढी में सोवें स्थान का पद
 अ- (स-१) च होगा ॥

(८०) इस कारण जो श्रेढी का आदि पद और
 चय मालूम हो तो उन से श्रेढी का चाहे जिस स्थान
 का पद निकल सकता है ॥

॥ उदाहरण ॥

१. ५. ८. १३. १७. आदि श्रेढी का पचासवां पद बतलाओ
 यह योग श्रेढी है इस कारण अ + (स-१) च इस
 में स के स्थान में ५० रक्वा और अ के स्थान में १ और
 र च के स्थान में ५-१ वा ४ रक्वा तो $१ + (५०-१)४ =$
 $१ + २०० - ४ = १९७$ यही श्रेढी का पचासवां पद
 हुआ ॥

(८१) श्रेढी के पदों का जो योग करना हो अर्थात्
 श्रेढी फल लाना हो तो उन पदों का योग योग करने
 की रीति से कर सकते हैं परन्तु जब श्रेढी के बहुत से प
 द हों तो इस रीति से योग करने में उलझाव दिखाई
 देगा इस के लिये एक सुगम रीति लिखते हैं ॥

॥ रीति ॥

श्रेढी के आदि और अंत पद के अर्ध योग को श्रेढी
 के पदों की संख्या वा गच्छ से गुण दो वा जो सुगम पड़ें
 तो आदि और अंत पद के योग के आधे गच्छ से गुण
 दो यही घात इस श्रेढी फल होगा ॥

१. ५. ८. १३. १७. आदि इस श्रेढी के पांच पदों का
 श्रेढी फल बतलाओ ॥

१ पहिला पद और १७ अन्त पद इन का योग १८

हुआ इसका आधा हुआ इसको ५ मन्त्र तेगुणा तो ८ × ५ वा ४०
 श्रेणी फल हुआ इसकी सत्यता देखने के लिये १+५+८+१३+२०
 इसका योग करके देखो कि योग ४५ है या नहीं जो ४५ निकले
 तो श्रेणी फल गीक जानो ॥

जो पूर्व श्रेणी के सौवें पद तक सब पदों का योग करना हो तो
 प्रथम सौवें पद को हूँछा ॥

$$१ + (१०० - १) \times ४ = १ + ४०० - ४ = ३९७$$

$$\text{अब द्रष्टव्य योग} = \frac{१}{२} (१ + ३९७) \times १०० = १९९ \times १०० = १९९००$$

॥ श्रुति की उपपत्ति ॥

श्रेणी का आदि पद अ है और च चय है और
 प पिछला पद वा अंत पद है ॥ तो

अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च + आदि... + प यह
 श्रेणी का स्वरूप हुआ और कल्पना करो कि श्रेणी के
 पदों का योग यह है ॥ तो य = अ + अ + च + अ + २च
 + अ + ३च + आदि + य श्रेणी के पास के प्रत्ये
 क दो पदों के बीच च अंतर समान है और योग
 ज श्रेणी में प पिछला पद है इस लिये प-च पद रू
 स के पूर्व होगा और प-च इस पद के पूर्व प-२
 च यह पद होगा ऐसे ही श्रेणी के और पद होंगे
 न को उत्क्रम से लिखा ॥ तो

य = प + प - च + प - २च + आदि... अ + च + अ
 और य = अ + अ + च + अ + २च + आदि... प-च
 + प इन का योग किया तो २य = अ + प + अ + प
 + अ + प + आदि... अ + प + अ + प श्रेणी में लिखे

पद होंगे उतने ही बार अ + प आवेगा और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो ॥ तो

२य = ग बार अ + प वा ग × (अ + प) इस कारण य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ऐसे ही जो अंतर श्रेढी हो तो भी श्रेढी फल वा य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ॥

केवल अंतर श्रेढी में योगज श्रेढी की श्रृंखला + च के स्थान में - च होगा और उत्क्रम अंतर श्रेढी में - च के स्थान में + च होगा कारण यह है कि अंतर श्रेढी में कोई पद जैसे प पूर्व पद से च के समान छोटा होगा वा प + च पूर्व पद होगा इस लिये अंतर श्रेढी फल वा य = अ, अ - च, अ - २च, अ - ३च + आदि... + प ॥

और य = प + प + च + प + २च + प + ३च + आदि + अ इन दोनों फलों का योग करने से २य = अ + प + अ + प + अ + प + आदि अ + प श्रेढी में जितने पद होंगे उतने ही बार अ + प आवेगा ॥

और जो ग को गच्छ वा पदों की संख्या मानो तो २य = ग बार अ + प वा ग (अ + प) इस कारण य = $\frac{1}{2}$ ग (अ + प) ॥

(६३) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद ढूँढ़ो वा ऐसी राशि निकालो कि जब उन तीनों राशियों को क्रम से रखें तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अंतर हो ॥

कल्पना करो कि य ऐसी राशि है तो अ, य, क, ये श्रेढी पद होंगे और जो योगज श्रेढी होगी तो

य-अ च य होगा और क-य भी चय होगा॥

इस कारण य-अ=क-य

पक्षांतरानयन से $२य = अ + क$

२ का भाग देने से $य = \frac{अ + क}{२}$

इसे यह बात निकली कि जो योगन श्रेढी का अंतर श्रेढी की दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो उन दोनों राशियों का प्रायायोग- $\frac{१}{२}$ मध्य पद होगा॥

॥ उदाहरण ॥

(१) ६ और २० इन के बीच $\frac{१}{२}$ (६+२०) वा १३ मध्य पद होगा अर्थात् ६, १३, २० ये श्रेढी पद हुए अ + क और अ-क इन के बीच $\frac{१}{२}$ (अ + क + अ-क)

वा अ मध्य पद होगा अर्थात्

अ + क, अ, अ-क ये श्रेढी पद हैं॥

(८४) अ और क दो राशि हैं उन के बीच मध्य पद निकालो वा ऐसी दो राशि ढूंढो कि जब उन चारों राशियों को क्रम से रक्खें तो उन में प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो कल्पना करो कि य और र इह राशि हैं तो अ, य, र क ये श्रेढी पद होंगे और अ और र इन के बीच का मध्य पद $य = \frac{अ + र}{२}$ ऐसे ही य और क इन के बीच का मध्य पद $र = \frac{य + क}{२}$ इन दो समीकरणों से य और र इन का मान लाओ ॥

८३ प्रक्रम ॥

पहिले समीकरण में २ का गुणा करने से

$$२य = २अ + २ परन्तु दूसरे समीकरण में$$

$$२ = \frac{य + क}{२}$$

$$\text{इस कारण } २य = २अ + \frac{य + क}{२} \quad २ से गुणा किया तो$$

$$४य = ४अ + य + क \quad \text{शोधन से}$$

$$३य = ४अ + क \quad ३ का भाग देने से$$

$$य = \frac{४अ + क}{३}$$

और $२य = २अ + २$ यह जो समीकरण पूर्व लिखा है इस में य स्थानान्तरण करने और य का मान रखने से

$$२ = २य - २अ = \frac{४अ + २क}{३} - २अ = \frac{२अ + २क}{३} \parallel$$

इसलिये $अ, \frac{२क + क}{३}, \frac{अ + २क}{३}$, क ये श्रेढी पद हैं।

॥ अालाप ॥

$$\frac{२अ + क}{३} - अ = \frac{क - अ}{३}, \frac{२क + अ}{३} - \frac{२अ + क}{३} =$$

$$\frac{क - अ}{३} \quad \text{और} \quad \frac{अ + २क}{३} = \frac{क - अ}{३}, \text{इससे यह}$$

मालूम हुआ कि $अ, \frac{२अ + क}{३}, \frac{अ + २क}{३}$, क इन श्रेढी पदों में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समा नान्तर है वा उन पदों का $\frac{क - अ}{३}$ चय है ॥

८५ प्र० अ और क इन के बीच दो मध्य पद नि कालने की दूसरी सुगम रीति बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि च चय है तो $अ, अ + च, अ + २च$

क ये श्रेढी पद होंगे इस कारण इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर होगा और समान अन्तर च है ॥

इस कारण च = क - (अ + २च) कोष्ट मिटाने से

च = क - अ - २च पक्षान्तरानयन से

३च = क - अ ३का भाग देने से

$$\text{च} = \frac{\text{क} - \text{अ}}{3}$$

इस कारण अ + च और अ + २च ये मध्य पद

तुल्य हैं अ + $\frac{\text{क} - \text{अ}}{3}$ अ + $\frac{२\text{क} - \text{अ}}{3}$ वा $\frac{२\text{अ} + \text{क}}{३}$ और $\frac{\text{अ} + २\text{क}}{३}$ इन के ॥

इसी रीति से कुछ दो राशियों के बीच दो से अधिक मध्य पद निकल सकते हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{२}$ इन के बीच मध्य पद निकालो ॥

$$\text{मध्य पद} = \frac{१}{२} \left(\frac{१}{४} + \frac{१}{२} \right) = \frac{१}{२} \times \frac{३}{४} = \frac{३}{८} ॥$$

(२) $\frac{१}{३}$ और $\frac{११}{६}$ इन के बीच दो मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि य च य है तो $\frac{१}{३} + य$, $\frac{१}{३} + २य$, $\frac{११}{६}$

ये श्रेढी पद होंगे और इन में पास के प्रत्येक दो पदों के बीच समान अन्तर है। इस लिये

$$\text{च य य} = \frac{११}{६} - \left(\frac{१}{३} + २य \right)$$

$$\text{कोष्ठ मिलाने से} = \frac{22}{4} - \frac{1}{3} = 25$$

$$= \frac{8}{4} = 25$$

$$\text{पहलांतर नयन से} = \frac{1}{4}$$

$$\text{३ का भाग देने से} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

अतः स्थिते $\frac{2}{3} + 25 = 25 \frac{2}{3}$ ये मध्य पद तुल्य हैं $\frac{2}{3} + 25$
और $\frac{2}{3} + 25$ बा $\frac{2}{3}$ और $25 \frac{2}{3}$ के

इस कारण $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ ये श्रेणी पद हुए ॥

॥ गुणोत्तर श्रेणी ॥

जब एक पंक्ति में राशि इस क्रम से स्थापित हों कि प्रत्येक दो पास की राशियों में भाग देने से समान लब्धि मिले वा पंक्ति के पहिले पद को किसी एक गुणक से क्रम से गुणा करने से शेष पद उत्पन्न हुए हों तो ऐसी पंक्ति को गुणोत्तर श्रेणी कहेंगे और उस गुणक को गुणोत्तर वा सम्वन्ध चाहे वह पूर्णाङ्क हो वा भिन्न जैसे १, २, ४, ८, १६, यह वर्द्धमान वा बढ़ती गुणोत्तर श्रेणी हैं कारण यह है कि इस श्रेणी में प्रत्येक पद पूर्व पद से दूना है ऐसे ही १६, ८, ४, २, १ यह क्षीयमाण वा घटती गुणोत्तर श्रेणी है कारण यह है कि इस श्रेणी में प्रत्येक पद पूर्व पद से आधा है पहिली वर्द्धमान श्रेणी में २ गुणोत्तर हैं और दूसरी क्षीयमाण श्रेणी में $\frac{1}{2}$ गुणोत्तर हैं ॥

गुणोत्तर ओढ़ी की यह पहचान है कि चाहे जिनके पास के पदों में पहिले पद का दूसरे पद में भाग देतो लब्धि तुल्य होगी और ऐसी लब्धि को गुणोत्तर जो लते हैं और जो सब लब्धि समान न हों तो गुणोत्तर ओढ़ी न जानो ॥

॥ उदाहरण ॥

(१) १.३.६.२७. इस गुणोत्तर ओढ़ी में गुणोत्तर क्या है वा ३ यही गुणोत्तर है ॥

(२) १.३.६.१२ आदि इस ओढ़ी में गुणोत्तर क्या है = २ यह गुणोत्तर है ॥

ओढ़ी के यह पहिले पद का दूसरे पद में इस लिये भाग नहीं दिया कि पहिला पद भिन्न है इस लिये सहज में बिना किया बढ़ाये तीसरे पूर्ण पद में दूसरे पद का भाग देके २ गुणोत्तर निकाल लिया।

(३) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}$ ये गुणोत्तर ओढ़ी के पद हैं वा नहीं और जो हैं तो गुणोत्तर बतलाओ कि क्या है।

$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{2}{3}$ इस लिये $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}$ ये गुणोत्तर ओढ़ी के पद हैं और यह गुणोत्तर है ॥

८७ प्र० जो गुणोत्तर ओढ़ी का अ अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर हो तो अ, आ, ग, अ, ग, अ आदि गुणोत्तर ओढ़ी होगी और इस में प्रत्येक पद पूर्ण पद से ग गुना है और जो स ओढ़ी पद के स्थान की संख्या जाने तो सब स्थान का अ ग पद होगा

कारण यह है कि जो तुम सको २ मानो तो अग
 स-२ = अग^{२-१} = अग यह ओढ़ी के दूसरे स्थान
 का पद है ऐसे ही जो सको ३ मानो तो अग^{३-१} = अग^२
 य स-२ = अग यह ओढ़ी के तीसरे स्थान का पद है।
 जो सको ४ मानो तो अग स-२ = अग^{४-२} = अग^२
 यह ओढ़ी का चौथा पद है, ग का घात प्रकाश दूस
 २ पद में १ है और तीसरे पद में २ है और चौथे पद
 में ३ है वा पद के स्थान की संख्या से ग का घात प्र
 काशक १ कम है ॥

८८ प्र- इस लिये जो गुणोत्तर ओढ़ी में आदि
 पद और गुणोत्तर मात्र हो तो उन से ओढ़ी का
 बाह्यो जो पद निकाल लो क्योंकि जिस पद को नि
 काया जायते हो उस क स्थान की संख्या स हो ओ
 र अ आदि पद हो और ग गुणोत्तर तो सवें स्थान
 का पद = अग स-१ ॥

॥ उदाहरण ॥

१. २. ४. २७. आदि गुणोत्तर ओढ़ी का आठवां
 पद निकालो तो अ आदि पद = १ और $\frac{1}{2} = 3$
 गुणोत्तर और स = ८

इस लिये अग = १ × ३ = ३ × ३ = ३ × ३ × ३ = २७ ॥

योग करने की रीति से गुणोत्तर ओढ़ी के पदों का
 योग का ओढ़ी कल मिल जाता है परन्तु जो ओढ़ी
 में बहुत पद हों तो योग करने की रीति से ओढ़ी क
 ल काम में बहुत देर लगेगी और उसका बहिर्वाह

देगा इस कारण अगले ८८ प्रक्रम में ओढ़ी फल
लाने की सुगम रीति लिखते हैं ॥

८८ प्र० गुणोत्तर ओढ़ी के पदों के योग करनेवा
ओढ़ी फल निकालने की रीति ॥

॥ उपपत्ति ॥

कल्पना करो कि अ, क, घ, च, आदि, य, प, ग गुणो
त्तर ओढ़ी के पद हैं और ग गुणोत्तर है तो ओढ़ी के
अ आदि पद को ग गुणोत्तर से गुणा तो अ ग
दूसरा पद हुआ परन्तु ओढ़ी का क दूसरा पद है।

इस कारण क = अ ग

ऐसे ही घ = क ग

च = घ ग

आदि = आदि

प = म ग

योग करने से क + घ + च + आदि + य = अ ग + क
ग + घ ग + आदि + म ग = (अ + क + घ + आदि + म)
य यह प्रथम समीकरण हुआ ॥

जो य को सब पदों का योग वा ओढ़ी फल मानो
तो अ + क + घ + च + आदि + म + प = य ॥

पक्षान्तरा नयन से

क + घ + च + आदि + म + प = य — य पक्षान्तरा
नयन से ही अ + क + घ + आदि + म = य — प ॥

और अ आदि पद है और य अन्त पद ॥

इस सिधे प्रथम समीकरण का स्वस्व यह हुआ ॥

य — अ = (य - प) ग

= प ग - प ग पञ्चान्नरा नयन से

य ग - य = प ग - अ ॥

वा रा - ए य = प ग - अ ॥

ग - २ इस का भाग देने से

$$य = \frac{प ग - अ}{ग - २} \text{ यही श्रेढी फल हुआ ॥}$$

इस लिये जो किसी और गुणोत्तर श्रेढी का फल निकालना हो तो अ आदि पद अन्त पद और ग गुणोत्तर इन के स्थान में जो इस श्रेढी में राशि हो उन को $\frac{प ग - अ}{ग - २}$ इस श्रेढी फल में रखो तो जो राशि मिलेगी वही इस श्रेढी फल होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

१. २. ४. ८. आदि १०२४ इस श्रेढी का श्रेढी फल निकालो १ आदि पद है १ वा २ गुणोत्तर है और १०२४ अन्त पद है इस लिये $\frac{प ग - अ}{ग - २}$ श्रेढी फल में अ ग और प के स्थान में क्रम से १. २. और १०२४ रखो तो

$$\text{इस श्रेढी फल} = \frac{१०२४ \times २ - १}{२ - १} = २०४७$$

इस उत्तर की सत्यता जानने के लिये, १. २. ४. ८. १६. ३२. ६४. १२८. २५६. ५१२. १०२४ इस श्रेढी के सब पदों का योग करो और जो योग २०४७ हो तो पूर्ण श्रेढी फल की सत्य जानो ॥

१०० प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच मध्य पद निकालो कल्पना करो कि य मध्य पद है तो अ य क, ये श्रेढी पद हुए और $\frac{य}{अ} = \text{गुणोत्तर ऐसे ही क} =$

६६ प्रश्न ॥

गुणोत्तर इस लिये $\frac{य}{अ} = \frac{क}{य}$ अथ से गुणा करने से
 $य^2 = अक$ ॥

- वर्ग मूल लिया तो $य = \sqrt{अक}$ यह मध्य पद हुआ
 इससे यह बात निकलती है कि जो गुणोत्तर श्रेणी में
 दो राशियों के बीच मध्य पद निकालना हो तो दोनों
 राशियों के घात का वर्ग मूल इस मध्य पद होगा ॥

॥ उदाहरण ॥

(५) १६ और ६४ के बीच $\sqrt{१६ \times ६४}$ वा $\sqrt{१०२४}$ वा ३२
 मध्य पद है अर्थात् १६, ३२, ६४, ये श्रेणी पद हैं ॥

$\frac{अ}{क}$ और $\frac{क}{अ}$ इन के बीच $\sqrt{\frac{अ}{क} \cdot \frac{क}{अ}}$ वा $\sqrt{१}$ वा १ मध्य
 पद है अर्थात् $\frac{अ}{क}$, १, $\frac{क}{अ}$, ये श्रेणी पद हैं ॥

१०१ प्र० अ और क इन दो राशियों के बीच दो
 मध्य पद निकालो ॥

कल्पना करो कि य और र मध्य पद हैं तो अ. य.
 र. क. ये श्रेणी पद हुए और ग को गुणोत्तर मानो
 तो अ आदि पद को ग से गुणा। तो

अ ग = य दूसरा पद हुआ इसी रीति से

य ग = र तीसरा पद हुआ

र म = क चौथा पद हुआ

दूसरे समीकरण को ग से गुणा तो $य ग^2 = र ग = क$

और पहिले समीकरण को ग से गुणा तो

अ ग = य ग और य ग = क

इस कारण अ ग = क

$\text{अ का भाग देने से ग} = \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$
 $\text{घन मूल लिया तो ग} = \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$
 $\text{इस लिये} \quad \text{घ} = \text{अ ग} = \text{अ} \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$

$$\begin{aligned}
 \text{और र} &= \text{घ ग} = \text{अ} \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}} \times \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}} \\
 &= \text{अ} \left(\sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}} \right)^2
 \end{aligned}$$

१०२ प्र० दो राशियों के बीच दो मध्य पदों को सहज से निकालने की सीरी बतलाते हैं ॥

कल्पना करो कि अ और क राशियों के बीच मध्य पद निकालना है और ग गुणोत्तर है तो अ, अग, अग^२, क, ये चोढ़ी पद होंगे ॥

$\text{और } \frac{\text{क}}{\text{अ}} = \text{ग गुणोत्तर}$
 $\text{ग से गुण किया तो } \frac{\text{क}}{\text{अ}} = \text{ग}^2$
 $\text{घन मूल लिया तो ग} = \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$
 $\text{और अ ग} = \text{अ} \sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$ यह पहिला मध्य पद हुआ ॥

और अ ग^२ = $\text{अ} \left(\sqrt[3]{\frac{\text{क}}{\text{अ}}} \right)^2$ यह दूसरा मध्य पद हुआ ॥

इसी रीति से जो चोढ़ी के आदि पद और अन्त पद मालूम हों तो उस से चोढ़ी के सब मध्य पद मालूम हो सके हैं ॥

॥ उदाहरण ॥

$\frac{१}{३}$ और $\frac{१}{२}$ इन के बीच का मध्य पद बतलाओ मध्य पद = $\sqrt[3]{\frac{१}{३} \times \frac{१}{२}} = \sqrt[3]{\frac{१}{६}} = \frac{१}{\sqrt[3]{६}}$

* २६ प्रश्न ॥

हैं और उनके बीच तो मध्य पद बिकासे।
कल्पना करो कि य गुणोत्तर है तो

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ य. $\frac{1}{8}$ य. $\frac{1}{16}$ ये श्रेणी पद द्वारा

और $3 + \frac{1}{2}y^2 = 2$ गुणोत्तर

$$\text{वा } \frac{२७}{५} = \text{य}$$
$$य^३ से गुणा तो २७ = य^३$$

घन मूल लिया तो ३ = य इस लिये ३ गुणोत्तर है

गौर $\frac{2}{3}$ य = $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ यहिला मध्य पद ह्यथा

और $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = 1$ दूसरा मध्य पद हुआ

इस कारण $\frac{1}{2}$ से $\frac{2}{3}$ के बीच होती पड़ता ॥

॥ २१ अध्यास के लिये शस्त्र ॥

मीचे जो तीन श्रेदी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेदी
का पांचवां जोर बीसवां पद बतलावौ ॥

(११) १ ६ १२ आदि

(२) १६, १५, १४ आदि

(३) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$ प्रादि

नीचे जो सात श्रेणी लिखी हैं उन में प्रत्येक श्रेणी

के बीसवें पद तक का श्रेष्ठ फल बताओ ॥

(४) १. ३. ५. ७. आदि

(५) ५. ८. ११. १४. आदि

(हं) १००, ११०, १२०, आदि

(७) १००, ६७, ६५. आदि

(८) १५, ११, ७, ... आदि

आदि
१३
२४
२५

(१०) १३. १२^३. १२^३. आदि

(११) एक बनिये ने गल्ले में कुछ रुपये जैसे वर्ष दिन वा ३६५ दिन में इसी रीति से इकट्ठे किये कि पहिले दिन उस ने $\frac{१}{६}$ पाई के बराबर कौड़ियां गल्ले में डाली और दूसरे दिन $\frac{२}{६}$ पाई की कौड़ियां तीसरे दिन $\frac{३}{६}$ पाई की कौड़ियां और चौथे दिन एक पाई परन्तु ७वें दिन या रविवार को नागा की ऐसे ही उस बनिये ने क्रम से गल्ले में धन डाला और हर रविवार को नागा रक्खी तो बतलाओ कि उस ने ३६५ दिन में कितना धन इकट्ठा किया और जो वह इसी क्रम से धन गल्ले में डाले तो वह पनीसवें अठवारे को कितना धन गल्ले में डालेगा ॥

(१२) एक ऋणी ने अपना ऋण २५ अठवारों में इस रीति से चुकाया है कि पहिले अठवारे को उस ने अपने धनी को २ आने दिये और दूसरे अठवारे को ५ आने और तीसरे अठवारे को ८ आने इसी क्रम से उस ऋणी ने अपने धनी का सब ऋण २५ अठवारों में चुका दिया तो बतलाओ कि उस को कितना ऋण चुकाना था ॥

(१३) दिन के १२ बजे से रात्रि के १२ बजे तक १२ घण्टे बजते हैं तो बतलाओ कि इतने समय में घण्टे पर कितनी मोंगरियां पड़ी होंगी. तुम यह अच्छी रीति से जानने हो कि जब एक बजता है तो घण्टे पर केवल एक मोंगरी पड़ती है और जब दो बजते हैं तो घण्टे पर दो मोंगरी लगानी होती हैं इसी रीति

से जे घण्टे बजाने होते हैं उननीही मोंगरियां घ
ण्टे पर लगाते हैं ॥

(१४) २०० पत्थर की कनलों को एक सीध में दो
२ हाथ के अन्तर से रक्खा और उसी सीध में पहि
ली कत्तल से ६० हाथ दूर एक डलिया रक्की फिर
एक मनुष्य डलिया के पास से चलकर पहिली
कत्तल के पास जो ६० हाथ दूर थी उस कत्तल को
उठाके लोटकर डलिया में धर गया और फिर
डलिया के पास से चलकर दूसरी कत्तल के पास आ
या जो पहिली कत्तल से २ हाथ दूर पर रक्की थी
इसे लोटकर डलिया में रख गया इसी रीति से उस
मनुष्य ने डलिया जहां रक्की थी वही रहने दी और
उस के पास चलकर क्रम से सब कत्तलों को बटो
र कर उसी डलिया में रख दी तो बतलाओ कि
उस मनुष्य को इस गरा फेरी में कितना चलना पड़ा

(१५) गुणोत्तर श्रेढी के $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{3}$ ये दो पहिले
पद हैं तो बतलाओ कि गुणोत्तर क्या है और श्रेढी
का तीसरा पद कौन सा है ॥

(१६) $\frac{1}{8}$ और $\frac{7}{8}$ इन के बीच गुणोत्तर श्रेढी का
मध्य पद क्या होगा और उनहीं दोनों भिन्नो के बीच
अन्तर श्रेढी का मध्य पद क्या होगा ॥

(१७) १ और ३ इन के बीच के ३ योगन श्रेढी के
मध्य पद बतलाओ ॥

(१८) १०० और ८० इन के बीच के ४ अन्तर श्रेढी
के मध्य पद बतलाओ ॥

(२६) ५ और ३२० इनके बीच के ३ गुणोत्तर ओढ़ी के मध्य पद निकालो ॥

(२७) १०० और २१४ इनके बीच के ३ गुणोत्तर ओढ़ी के मध्य पद निकालो ॥

(२८) एक ऋणी ने अपना ऋण चुकाने का यह वन्दान किया कि उसने पहिले अठवारे को ५ आने दिये और दूसरे अठवारे को ८ आने दिये इसीरी तिसे उसने प्रत्येक अठवारे में क्रमसे ३ आने की बढ़ती से ऋण चुकाया और उसने अन्त के अठवारे को १० ॥ ३) आना दिये तो बतलाओ कि उसने कितना ऋण कितने अठवारों में चुकाया ॥

(२९) एक व्यापारी ने व्यापार किया तो पहले वर्ष में उसे केवल १००) नफ़ा के मिले और दूसरे वर्ष में १३०) नफ़ा के मिले तीसरे वर्ष में १६०) नफ़ा के मिले इसी क्रम से हर वर्ष में उसे ३०) नफ़ा के अधिक मिले और अन्त वर्ष में उसे ५५०) नफ़ा के मिले तो बतलाओ कि उसने कै वर्ष व्यापार किया ॥

(३०) एक जमींदार ने १० सेर गेहूं बोये और फसल में जो गेहूं हुआ उन को अगले वर्ष में बोये और दूसरी फसल में जो गेहूं हुआ वे तीसरे वर्ष में बोये फिर तीसरी फसल के गेहूंओं को चौथे साल में बोया तो चौथी फसल में १२६५ ६ ३/४ मन गेहूं हुआ और पहिली फसल में गेहूं बीज के गेहूं से जै गने उत्पन्न हुए उतने ही गने गेहूं हर फसल में बीज के गेहूं से उत्पन्न हुए तो

बतलाओ कि हर फुल्ल के गेहूं बीज के गेहूं से कितने गुने अधिक उत्पन्न हुए ॥

(२४) गति विद्या में यह लिखा है कि जो कोई पदार्थ ऊपर से नीचे को गिरे तो वह पहिले सेकण्ड वा $2\frac{1}{2}$ विपल में करीब $16\frac{2}{3}$ फुट के गिरेगा और दूसरे सेकण्ड में $16\frac{2}{3} + 32\frac{1}{2}$ फुट गिरेगा और तीसरे सेकण्ड में $16\frac{2}{3} + 32\frac{1}{2} + 32\frac{1}{2}$ फुट गिरेगा इसी क्रम से वह पदार्थ प्रत्येक सेकण्ड में $32\frac{1}{2}$ फुट की बढ़ती से गिरेगा और हवा में ऊपर बुर्ज चढ़ा या उसमें से कुछ भारी वस्तु नीचे को गिरा और वह २० सेकण्ड में धरती पर आ पहुँचा तो बतलाओ कि ऊपर जो हिसाब लिखा है उस के अनुसार बुर्ज धरती से कितना ऊँचा होगा स्मरण रखो कि इस गणित में हवा की रोक का कुछ परिमाण नहीं लिखा है ॥

॥ मिश्र प्रश्न ॥

नीचे जो बीजात्मक राशि लिखी हैं उन का लघुतम रूप को

- (१) (२ग-३र)य-(ग-१)य-(ग-२र)य-य ॥
- (२) (व-क)य-(व+क)य+३कय-२य ॥
- (३) (अ-२प)य+(अ+२प)य-(प-अ)य-य ॥
- (४) बतलाओ कि $\frac{अ-क}{अ-क}$ यह $\frac{अ}{अ-क}$ इसके तुल्य है ॥

(५) बतलाओ कि $\frac{अ-क}{य}$ यह $\frac{अ}{य} - \frac{क}{य}$ इसके तुल्य है ॥

(६) जो अ=क=-ग वा अ, क, -ग ये तीनों राशितुल्य

हों तो चतुर्थांशों कि $\frac{अक-२अक+ग}{क-३कग+ग}$ इस का
 क्या मान है ॥

(७) $२(अ+क)-३(ग-घ)$ इसमें से $अ+क-४$
 $(ग-घ)$ इसको घटाओ ॥

(८) $(अ+क)य+(क+ग)र$ इसमें से $(अ-क$
 $य-(क-ग)र$ इसको घटाओ ॥

(९) $द्वय-\frac{२य}{क}$ इसमें से $५\frac{२}{३}ग-\frac{अ}{क}$ इसको
 घटाओ ॥

(१०) $\frac{य+५}{४(य-२)}$ इसमें से $\frac{५य-२५}{४(य-२)}$ इसको घटाओ ॥

(११) $\frac{न}{न+१}$ और $\frac{न^२}{न+१}$ इन का योग करो ॥

(१२) $\frac{य}{२} + \frac{य}{३}$ इन को ६ से गुणा दो ॥

(१३) $१+य$ इसमें $\frac{१}{२} + १$ इसका भाग दो ॥

(१४) $अ+४क$ इसमें $अ-२अक+२क$ इस
 का भाग दो ॥

(१५) $७य+य-५य-३य$ इसमें $१-३य$ का भाग दो ॥

(१६) $अ+क+\frac{अ}{क}$ इसमें $अ+क+\frac{क}{अ}$ इसका भाग दो ॥

(१७) $अ-\frac{१}{२}(अ-\frac{३}{३}क)$ इसमें $क-\frac{१}{३}(अ+\frac{३}{३}$
 क) इस का भाग दो ॥

(१८) $य+१+\frac{१}{२}$ इसको $य-१+\frac{१}{२}$ इससे गुणा दो ॥

(१९) $अ-\frac{१}{३}$ इसमें $अ-\frac{१}{३}$ इस का भाग दो ॥

$$(20) \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \text{ इसका दर्जा करो } ॥$$

$$(21) (अ+य+अ+य) (य-अ) (य-अ+अ)$$

(अ+य) इस क्रम से गुणन का घात निकालो ॥

$$(22) अ-क इसमें $\sqrt{अ}$ - $\sqrt{क}$ इसका भाग दो ॥$$

$$(23) \frac{2}{3} \frac{2y+3}{2y-3} \text{ और } \frac{2}{3} \frac{2y-3}{2y+3} \text{ इन का योग करो } ॥$$

$$(24) \frac{य(य+1)(य+2)}{3} \div \frac{य(य+1)(य+2)}{1 \times 2 \times 3} ॥$$

॥ नीचे जो समीकरण लिखे हैं उनमें अव्यक्त राशिका मान बतलाओ ॥

$$(25) \frac{30}{य+1} = \frac{24}{य-2} ॥$$

$$(26) \frac{120}{3य-4} = \frac{240}{5य-6} ॥$$

$$(27) \frac{42य}{य-2} = \frac{34य}{य-3} ॥$$

$$(28) \frac{य-4}{3} = \frac{य+3}{8} ॥$$

$$(29) \frac{3}{य+1} = 7-2 ॥$$

$$(30) \frac{3}{1-3य} - \frac{4}{1-2य} = \frac{5}{5य-2} ॥$$

$$(31) \frac{1}{य+3} + \frac{2}{य+4} = \frac{3}{य+5} ॥$$

$$(32) \frac{2}{8} \left\{ 3y - \frac{2}{3}(y-2) \right\} = \frac{5}{4}y - 1 \parallel$$

$$(33) \frac{y-3}{2\frac{2}{3}} - \frac{y-4}{\frac{1}{2}} = \frac{24-y}{5} \parallel$$

$$(34) \frac{2y-1}{2y+1} + \frac{2y+1}{2y-1} = 3 \parallel$$

$$(35) \frac{40}{y+3} = \frac{1\frac{1}{2}y}{y+20} - 5 \parallel$$

$$(36) 3 \left(y - \frac{5}{4} \right) - \frac{y-2}{y+2} = 5 \parallel$$

$$(37) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}-y} + \frac{1}{4-y} = \frac{8}{2+y} \parallel$$

$$(38) \frac{6y+1}{\frac{1}{2}-y} = \frac{20}{3} \left(\frac{y-\frac{2}{3}}{y-\frac{1}{3}} \right) \parallel$$

$$(39) \frac{1}{2}(y-1)(y-2) = 2\frac{1}{8}(y-2\frac{2}{3}) \parallel$$

$$(40) \frac{2}{3}(y+3)(2y-4) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}(2y-\frac{24}{3}) \parallel$$

$$(41) \frac{2y(2y-y)}{2y-2y} = \frac{2}{4} \parallel$$

$$(42) \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}}{y+y-4} = y + 2y + 15 \parallel$$

$$(43) \left. \begin{aligned} 13y + 1342 &= 368 \\ 113y + 3002 &= 1600 \end{aligned} \right\}$$

$$(44) \left. \begin{aligned} 11y + 12r &= 102 \\ 11y - 30r &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$(45) \left. \begin{aligned} 5y + 200 &= 80(y + r) \\ 20r + 1000 &= 10(y - r) \end{aligned} \right\}$$

$$(46) \left. \begin{aligned} 2y + 3r &= 2\frac{2}{3}(y + 4) \\ 3(y + r) &= 4(y - r) \end{aligned} \right\}$$

$$(47) \left. \begin{aligned} 5\left(\frac{1}{2}y - 1\right) &= \frac{3}{2}(r + 1) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(r - 4) &= 3\frac{1}{3}\left(2\frac{1}{3} - \frac{1}{10}y\right) \end{aligned} \right\}$$

$$(48) \left. \begin{aligned} \frac{y+2}{r+2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{y-2}{r-2} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$(49) \left. \begin{aligned} \frac{y+2}{r+4} &= \frac{1}{2} \\ \frac{y-2}{r+3} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$(50) \left. \begin{aligned} \frac{y+6}{r} &= \frac{3}{5} \\ \frac{y}{r+10} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\}$$

$$(51) \left. \begin{aligned} \frac{y}{r} + y + yr &= 13 \\ y^2 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

(५२) जल में १ बांस गड़ा था उस का $\frac{1}{3}$ भाग जल में धरती के नीचे गड़ा था और उस का $\frac{2}{3}$ भाग जल के भीतर था और १ हाथ जल से ऊपर था तो बतलाओ कि बांस कितने हाथ लम्बा था ॥

(५३) दो मनुष्य सागी थे उन में पहला मनुष्य $\frac{1}{3}$ भाग का सागी था और दूसरा मनुष्य $\frac{2}{3}$ भाग का सागी था और दूसरे मनुष्य का जितना रुपया सागे में लगा था उसे १००० अधिक पहले मनुष्य का सागे का धन था तो बतलाओ कि सागे का सर्व धन क्या होगा ॥

(५४) एक मण्डली में सब पुरुष स्त्रियां और लड़के मिलकर ६० थे और ४ पुरुष स्त्रियों से अधिक थे और जितने पुरुष और स्त्रियां मिलकर थी उन से १० अधिक लड़के थे तो बतलाओ कि कितने पुरुष, कितनी स्त्रियां और कितने लड़के थे ॥

(५५) एक पुरुष की अब ४० वर्ष की अवस्था है और उसके पुत्र की ६ वर्ष की अवस्था है तो अब पिता की अवस्था पुरुष की अवस्था से ४ गुनी अधिक है तो बतलाओ कि कितने वर्ष पीछे पिता की अवस्था लड़के की अवस्था से केवल दूनी रह जायगी ॥

(५६) दो बटेयों ने मिलकर काम किया और उस को ७५ मनुद्वी के पिले और उन में १ मनुष्य ने १५ दिन काम किया और दूसरे ने २४ दिन और जो पहले मनुष्य की ४ दिन में मिला इस से ११ माने

कम दूसरे मनुष्य को २ दिन में मिला तो बतलाओ कि
हर मनुष्य को क्या ऐज मिला होगा ॥

(५७) ७ छोड़े और ४ गाय ने मिलकर एक घास के
ढेर को १० दिन में खा डाला और जो केवल २ छोड़े उ
सी ढेर को ४० दिन में खा जाते तो बतलाओ कि केवल
१ गाय बेसे ढेर को कितने दिन में खाएगी ॥

(५८) एक बुद्धिमान मनुष्य से पूछा कि कहो जो
तुम्हारी तुम्हारे पिता की और तुम्हारे दादाजी की कि
तनी २ अवस्था हैं उसने उत्तर दिया कि मेरी अवस्था
और मेरे पिता की अवस्था मिलकर ५६ वर्ष के समान
है और मेरी अवस्था और मेरे दादाजी की अवस्था ८०
वर्ष के तुल्य है और मेरे पिता की अवस्था और मेरे
दादाजी की अवस्था १०० वर्ष के समान है तो बतलाओ
कि तीनों पुरुष की न्यारी २ कितनी अवस्था होंगी ॥

(५९) एक लड़के ने ५ आने के सड़कतरे और मीठे
मोल लिये और एक सड़कतरा आधे आने का पड़ा और
एक सीढ़ा ४ पाई को पड़ा पर उसने दाओं के दाग को
३ भाग वे सड़कतरे और आधे मीठे २ आने को बँच
दिये तो बतलाओ कि उस लड़के ने कितने सड़कतरे
मोल लिये और कितने मीठे ॥

(६०) एक मैदा वाले ने बड़त अच्छी ४ मन सूजी की
मन ५) के भाव की बनाव परन्तु जब उसने देखा कि
सूजी का भारी मोल सुनकर खरीदार चोंक जाते हैं तो
उसने यह उपाय किया कि उस चोरखी ४ मन सूजी में फी
मन ११) भाव का जोर खारवा मिला दिया फिर इस

रवा मिली सूजी को ३।=) की मन भर इस हिसाब से
बैच डाली तो बतलाओ कि उसने कितना रवा मि
लाया होगा ॥

(६१) (न) राशि के ऐसे दो खण्ड करो कि उन में एक
खण्ड दूसरे खण्ड से न गुना हो ॥

(६२) एक दयावान मनुष्य ने विचारा कि दीन मनु
ष्यों को २३ आने की जिन्स आदमी पीछे दिलवा दूं
परन्तु उसने जब हिसाब किया तो मालूम हुआ कि उस
के पास ३ आने कम हैं इस कारण उसने हर एक दी
न मनुष्यों को २ आने की जिन्स दिलवा दी और इस
पीछे उसके पास ४ आने बच रहे तो बतलाओ कि उस
ने कितने दीनों का सत्कार किया और उस में कितना

(६३) एक हिरन शिकारी कुत्ते से अपने ५० छला
ड़ के अनुमान आगे था और जितने समय में कुत्ता
३ छलाड़ भरता उतने ही समय में हिरन ४ छलाड़
भरता परन्तु कुत्ते की २ छलाड़ और हिरन की तीन
छलाड़ बराबर थीं तो बतलाओ कि कितनी छलाड़ों
में कुत्ता हिरन को पकड़ लेगा ॥

(६४) एक दयावान मनुष्य के पास जो धन था उसने
अपने बेटों के बीच उस धन को इस रीति से बांट दि
या कि सब से बड़े लड़के को सर्व धन में से २०० रुपये
मिले और जो शेष रहा उस का दशांश मिला तिस
पीछे जो बचा उस में से दूसरे लड़के को २०० मिले
और जो शेष रहा उस का दशांश मिला फिर जो ध
न बचा उस में से तीसरे लड़के को ३०० मिले और

जो शेष रहा उसका दशांश मिला इस रीति से उसने अपने और सब लड़कों को धन बांट दिया परन्तु सब को बराबर ही धन मिला तो बतलाओ कि उस धनी के कितने लड़के थे और उस के पास कितना धन था ॥

(६५) सेज गाड़ी के अगले पहिये पिछले पहियों से छोटे होते हैं एक सेज गाड़ी में ऐसी कल लगी थी कि उससे जितने बार अगले पहिये पिछले पहियों से अधिक घूमते हैं उस का परिमाण मालूम हो जाता और अगले पहिये का घेर $4\frac{1}{2}$ फुट था और पिछले पहिये का घेर $3\frac{1}{2}$ फुट था तो बतलाओ कि जब अगले पहिये पिछले पहियों से २००० बार अधिक घूमें तो सेज गाड़ी कितनी दूर चली होगी ॥

(६६) एक मनुष्य के पास कुछ रुपये थे उसने उन को धरती में पास २ इस रीति से रक्खा कि उन से वर्ग क्षेत्र का स्वरूप बन गया और इस पीछे उस के पास ३३) बच रहे फिर उसने शेष रुपये इस रीति से पूर दिये कि वर्ग क्षेत्र के प्रत्येक भुज में ३) पास २ और रक्ते गये तिस पर भी वर्ग क्षेत्र का स्वरूप बला रहा और शेष रुपयों में से ३१) बच रहे तो बतलाओ कि उस मनुष्य के पास सब कितने रुपये थे ॥

(६७) एक तबंगर गड़रिये ने ६४) की बराबर हाथों की बकरियां मोल लीं परन्तु उन में ७ बकरियों को चोर ले गये फिर जो शेष बची उन में से चौथाई बकरियों को बे नफा ३०) को बेच डालीं तो बतलाओ कि उस गड़रिये ने कितनी बकरियां मोल लीं ॥

(६८) सन्दूक के तीनों खानों में १६२ रुपये रखे थे कि हर एक खाने में बराबर रखने के लिये दूसरे और तीसरे खानों में जितने २ रुपये थे उन के आधे आध रुपये पहले खाने में से निकालकर दूसरे और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये फिर इस रीति से पहले और तीसरे खानों में जितने २ रुपये हो गये उन के आधे आध रुपये दूसरे खाने में से निकालकर पहले और तीसरे खानों के रुपयों में मिला दिये और फिर जब पहले और दूसरे खानों में जितने २ रुपये हो गये तब उनके आधे २ रुपये तीसरे खाने से निकालकर पहले और दूसरे खानों के रुपयों में मिला दिये तब पीछे तीनों खानों में बराबर रुपये होगये तो बतलाओ कि पहले हर एक खाने में कितने २ रुपये रखे थे।

(६९) एक मनुष्य ने दरयाई कपड़ा कई गज १५ रुपये को खरीदा और दूसरे मनुष्य ने १५ ही रुपये को पहले मनुष्य की जपेसा १ गज कम दरयाई कपड़ा मोल लिया इस लिये इस मनुष्य को १ जाने गज के दाम सिवाय देने पड़े तो बतलाओ कि पहले मनुष्य ने कितने गज कपड़ा खरीदा होगा ॥

(७०) १०० के ऐसे खण्ड करो कि उन खण्डों के बर्गों का अन्तर ४०० है ॥

(७१) दो ऐसे भिन्न हैं कि उन का योग $\frac{६३}{६३}$ है और उन का अन्तर $\frac{६३}{६३}$ और उन्हीं भिन्नों के अंशों का योग ८ है और उन के हरों का योग २६ है तो बतलाओ कि वे कौन से भिन्न हैं ॥

(७२) एक मनुष्य के पैरों में चलने २ काले पड़ गये और जब वह बड़ाऊं से चला तो वह पहले दिन बड़ी मुश्किल से १ कोस चला और फिर ठिक रहा और दूसरे दिन ३ कोस चलकर रह गया और तीसरे दिन ५ कोस चलकर ठिक रहा इसी रीति से वह मनुष्य २ कोस की बढ़ती से चला, जब इस मनुष्य को ३ दिन बड़ाऊं से चले हो गये तिस पीछे एक दूसरा मनुष्य उसी तरह बड़ाऊं से चला और वह पहले दिन २२ कोस आया दूसरे दिन २३ कोस चला इस क्रम से वह मनुष्य हर दिन १ कोस की बढ़ती से चला तो बतलाओ कि पहिले उन दोनों मनुष्यों को भेंट राह में कौन से दिन हुई और किस दिन उन दोनों की चाल बराबर हो गई और जिस के उपरान्त किस दिन पहले मनुष्य की चाल दूसरे मनुष्य की चाल से अधिक हो गई और जिस दिन वे बराबर चले उस दिन कितने कोस चले ॥

(७३) एक शाला में लड़कों के ३ वर्ग बा दफ्तर थीं उन में जो विद्यार्थी थे, उन की संख्या में ऐसा सम्बन्ध था जो ५, ७, और ८ इन संख्याओं में है एक वर्ष पीछे उस शाला के पहिले वर्ग में जितने पहिले लड़के थे उन से चार और लड़के अधिक हो गये और दूसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दो सप्तमांश और बढ़ गये और तीसरे वर्ग में जितने लड़के थे उन के दूने हो गये और तीनों वर्गों में सब लड़के मिलकर ८४ हो गये तो बतलाओ कि पहले तीनों वर्गों में कितने लड़के थे ॥

(७४) चांदी का सजातीय गुरुत्व $२०\frac{१}{२}$ है और तंबे का सजातीय गुरुत्व $२०\frac{१}{२}$ है और तंबे मिले चांदी का सजातीय गुरुत्व $२०\frac{१}{२}$ है तो बतलाओ कि २४० बीने मिली चांदी में कितनी चांदी होगी और कितना तंबा

(७५) जो अः कः क + ग और जो कः गः ग + घ तो बतलाओ कि अः घः अः कः और

अ + कः क + गः क + गः ग + घ ॥

(७६) जो इ घ - अः ङ - कः इ य + कः य + अ तो बतलाओ कि य किस के तुल्य होगा ॥

(७७) जो अः कः गः घ तो बतलाओ कि अः अ + कः अ + गः अ + क + ग + घ ॥

(७८) २० के ऐसे तीन खण्ड करो कि पहिले और दूसरे खण्ड का सम्बन्ध २: ५ इस सम्बन्ध के समान हो और दूसरे और तीसरे खण्ड का सम्बन्ध ५: ३ इस सम्बन्ध के तुल्य हो ॥

(७९) ऐसी दो संख्या खोज ली हैं कि उन का सम्बन्ध $२\frac{१}{२}$: $२\frac{१}{२}$ इस सम्बन्ध के समान हो और जो उन दोनों संख्याओं में १५ जोड़ दें तो उन का सम्बन्ध $२\frac{१}{२}$: $२\frac{१}{२}$ इस सम्बन्ध के समान हो ॥

(८०) गोल के घनफल और उस के व्यास के घन में क्रम रूपान्तर सम्बन्ध है क्योंकि एक गोल का घनफल दूसरे गोल के घनफल से यदि सम्बन्ध रखेगा जो पहले गोल का व्यास दूसरे गोल के व्यास से रखता होगा तो जो एक गोल का व्यास दूसरे का व्यास हो और दूसरे गोल का व्यास पहले गोल का व्यास हो तो

बतलाओ किन्तु दोनों गोले के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(७२) पूर्णगोलाकार शरत्त विद्या में यह लिखा है कि ल प्रकाश पदार्थों के प्रकाश के परिमाण और उन के अन्तर का दूरी के वर्ग में उत्क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है अर्थात् जो कोई पदार्थ स्वप्रकाश जैसा सूर्य आदि से जो अधिक दूर होगा तो उसकी स्वप्रकाश पदार्थ का उजाला भी पूर्वोक्त गणित से कम निम्न पड़ेगा एक दीवे से ८ गंगुल के अन्तर पर एक पुस्तक धरी है तो बतलाओ कि उस पुस्तक को कितनी दूर और हटाकर रखें जिसे पुस्तक पर पड़े प्रकाश उजाला पड़े ॥

(७३) यदि धन क्षेत्र जैसा गोले लाठी गोले लेखनी में ही एक ही गोली है आदि के घन फल में गोले उस की लक्षिति वा ऊंचाई और उस के आकार वा एक ओर के बल के व्यास के वर्ग दुल के घात में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जो लक्षिति और व्यास का वर्ग दुल का घात जो गुना चढ़ेगा वा बढ़ेगा उतने ही गुना घन फल भी चढ़ेगा वा बढ़ेगा तो बतलाओ कि जब एक यदि धन क्षेत्र की ऊंचाई दूसरे यदि धन क्षेत्र की ऊंचाई से दूनी हो परन्तु उसका व्यास दूसरे यदि धन क्षेत्र के व्यास से आधा हो तो उन दोनों यदि धन क्षेत्रों के घन फलों में क्या सम्बन्ध होगा ॥

(७४) एक गोले में धातु है महीने में ३ पाई के घन मजदूर महीने में ३ पाई का महीने और दूसरे महीने में

१ पाई गह्वे में डाली और तीसरे महीने में ४ पाई गह्वे में डाली इसी रीति से उसने चौगुनी बढ़ि से धन गह्वे में १२ महीने तक डाला तो बतलाओ कि गह्वे में १२ महीने में कितना धन इकट्ठा हुआ होगा ॥

(७४) चार नगरी के मनुष्यों की संख्या इस क्रम से है कि पहिली नगरी में ५३०० मनुष्य हैं दूसरी नगरी में २६४० मनुष्य हैं तीसरी नगरी में १८७० मनुष्य हैं और चौथी नगरी में ६०० मनुष्य हैं तो बतलाओ कि जो २५० जवान पुलिस के इन नगरियों में चौकसाई के लिये भेजे जाय तो हर नगरी में उन मनुष्यों की संख्या के अनुसार कितने २ सिपाही भेजे जायगे ॥

(७५) धातु के दो गोल हैं उन में पहिले गोल का ६ अंगुल का व्यास है और दूसरे गोल का ७ अंगुल का व्यास है तो बतलाओ कि जो उन धातों के दोनों गोल को घसी के एक गोल बनावे तो इस गोल का कितना व्यास होगा परन्तु यह स्मरण रखो कि दो गोल के घन फलों में और उन के व्यास के घनों में क्रम रूपान्तर का सम्बन्ध रहता है वा जितना व्यास का घन जै गुना बढ़ जायगा वा घट जायगा उतने ही गुना घन फल भी बढ़ जायगा वा घट जायगा ॥

(७६) सम्वत् १८०० में कार्तिक शुद्ध पड़वा को एक धनी ने गरीब ब्राह्मण को इतना धन दिया कि वह जितने वर्ष की धनी की अवस्था थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था और फिर दूसरे सम्वत् १८०१ में कार्तिक शुद्ध पड़वा को उस धनी ने उसी गरीब ब्राह्मण

को इतना धन पुण्य में दिया कि वह जितने वर्ष की अवस्था धनी की उस सम्बन्ध में थी उस संख्या के ४ गुनी पाइयों के तुल्य था इसी रीति से उस धनी ने उसी हीन ब्राह्मण को १८०७ तक पुण्य किया और तिस पीछे मर गया तो बतलाओ कि उस धनी ने सब कितना धन पुण्य किया और जब वह मर गया तब उस की क्या अवस्था होगी और उस का जन्म कौन से सम्बन्ध में हुआ होगा

॥ १ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $y = १२$ $r = ५$	}	(८) $y = २$ $r = ३$	}
(२) $y = १०$ $r = २$		(९) $y = ११$ $r = ७$	
(३) $y = ६$ $r = २$	}	(१०) $y = \frac{२}{४}$ $r = \frac{१}{५}$	}
(४) $y = ३$ $r = १$		(११) $y = ५$ $r = ४$	
(५) $y = १$ $r = २$	}	(१२) $y = १०$ $r = ७$	}
(६) $y = ७$ $r = १०$		(१३) $y = ५$ $r = ३$	
(७) $y = ४$ $r = ३$	}	(१४) $y = ६$ $r = १०$	}
(८) $y = २$ $r = ३$		(१५) $y = ३$ $r = १०$	

(१७) $y = 3$	}	(१८) $y = 6$	}
$r = \frac{1}{2}$		$r = 6$	
(१८) $y = 6$	}	(१९) $y = 6$	}
$r = 2$		$r = 6$	

॥ २ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $y = 2$	}	(७) $y = 988$	}
$r = 1$		$r = 99$	
(२) $y = 11$	}	(८) $y = 8$	}
$r = 6$		$r = 11$	
(३) $y = 6$	}	(९) $y = 4$	}
$r = 8$		$r = 6$	
(४) $y = 6$	}	(१०) $y = 13$	}
$r = \frac{1}{2}$		$r = 3$	
(५) $y = 8$	}	(११) $y = 9$	}
$r = 21$		$r = 10$	
(६) $y = 188$	}	(१२) $y = 9$	}
$r = 211$		$r = 8$	

॥ ३ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| (१) २२ और १६ | (६) $\frac{1}{2}$ |
| (२) १५ और ३५ | (७) १४ और ६ |
| (३) ३४ पुरुष और २० स्त्री | (८) १२ और १८ |
| (४) १५ पुरुष और २२ स्त्री | (९) ११ सेर और ५ सेर |
| (५) $\frac{1}{2}$ | (१०) सम्वत् १७५२ ईसवी |

॥ ४ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- | | |
|---|--|
| (१) २५ $\frac{३}{२}$ य | (११) $\frac{२५}{२} \times \frac{३}{२} = \frac{७५}{४}$ |
| (२) २५ $\frac{३}{२}$ य र | (१२) $\frac{३}{२} + १ + २ \frac{३}{२}$ |
| (३) ४८ $\frac{३}{२}$ क | (१३) $\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + १ + २ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |
| (४) $\frac{३}{२}$ क ग | (१४) $\frac{३}{२} + ८ + ६ \frac{३}{२}$ |
| (५) ४८ $\frac{३}{२}$ क ग | (१५) $४ + \frac{३}{२} - ४ \frac{३}{२}$ |
| (६) $\frac{\frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{\frac{३}{२}}$ | (१६) $४ \frac{३}{२} + \frac{३}{२} - ४ \frac{३}{२}$ |
| (७) $\frac{८ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{४ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}$ | (१७) $४ \frac{३}{२} + \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} - १२ \frac{३}{२}$ |
| (८) $\frac{\frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{४ \times \frac{३}{२}}$ | (१८) $\frac{३}{२} + \frac{३}{२} - ३ \frac{३}{२}$ |
| (९) $\frac{१६ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{४८ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}$ | (१९) $\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + \frac{३}{२} + २ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |
| (१०) $\frac{८ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{४ \times \frac{३}{२}}$ | (२०) $\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + \frac{३}{२} + २ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |
| | (२१) $४ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + \frac{३}{२} - ४ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |
| | (२२) $\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + \frac{३}{२} + २ \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |
| | (२३) $\frac{८ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{४८ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}$ |
| | (२४) $\frac{१}{४} \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} + \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}$ |

॥ ५ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- | | | |
|--|---|------------------------|
| (१) २ $\frac{३}{२}$ क | (५) $\frac{२ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{२ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}$ | (९) २ $\frac{३}{२}$ क |
| (२) ३ य र | (६) $\frac{३ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{२ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}$ | (१०) ३ य + १ |
| (३) १ $\frac{३}{२}$ क ग | (७) १ - य | (११) य + $\frac{३}{२}$ |
| (४) $\frac{३ \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२}}{२ \times \frac{३}{२}}$ | (८) २ य + १ | (१२) य - $\frac{३}{२}$ |
| (१३) य - १२ य + २६ | (१४) य - १४ य + ३८ | |

(१५) $y + ११y + \frac{२२}{४}$	(२०) $y + \frac{२}{३}y + \frac{१}{१५}$
(१६) $y + २y + १$	(२१) $y + \frac{२}{३}y + \frac{२}{३६}$
(१७) $y - y + \frac{१}{४}$	(२२) $y + \frac{५}{६}y + \frac{२५}{९४४}$
(१८) $y + \frac{४y}{५} + \frac{४}{२५}$	(२३) $y - \frac{३y}{४} + \frac{१५}{६४}$
(१९) $y - \frac{२y}{७} + \frac{१}{४८}$	(२४) $y - \frac{७y}{१०} + \frac{४९}{४००}$

॥ ६ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं

उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $y = \pm ६$	(५) $y = \pm २$	(९) $y = \pm \frac{१}{२}$
(२) $y = \pm ४$	(६) $y = \pm ५$	(१०) $y = \pm ३$
(३) $y = \pm १$	(७) $y = \pm ५$	(११) $y = \pm ३$
(४) $y = \pm ४$	(८) $y = \pm ३$	(१२) $y = १\frac{१}{४}$ वा $\frac{१}{४}$

॥ ७ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं

उन के उत्तर लिखते हैं ॥

(१) $y = ५$ वा -२	(४) $y = ३०$ वा -६	(७) $y = ६$ वा १
(२) $y = ४$ वा १	(५) $y = २$ वा १०	(८) $y = ६$ वा -५
(३) $y = ८$ वा २	(६) $y = २$	(९) $y = १\frac{१}{२}$ वा २

(१०) $y = ६$ वा $-४\frac{१}{२}$	(१६) $y = १\frac{१}{२}$ वा $-\frac{५}{६}$
(११) $y = ६$ वा $-१०\frac{१}{२}$	(१७) $y = २$ वा $-१\frac{१}{२}$
(१२) $y = १\frac{१}{२}$ वा $\frac{३}{१०}$	(१८) $y = २$ वा $-१\frac{१}{२}$
(१३) $y = \frac{३}{२}$ वा -३	(१९) $y = ४$ वा -२
(१४) $y = ६$ वा $-१०\frac{१}{२}$	(२०) $y = ७$ वा $-\frac{१}{३}$
(१५) $y = ६$ वा $-५\frac{१}{२}$	(२१) $y = १\frac{१}{२}$ वा $-\frac{१}{२}$
(१६) $y = १\frac{१}{२}$ वा $-\frac{२५}{२०}$	(२२) $y = \frac{१}{२}$ वा $-१\frac{१}{३}$
(१७) $y = १$ वा $\frac{३}{२}$	(२३) $y = २$ वा -३
(१८) $y = २\frac{१}{२}$ वा -२	(२४) $y = २$ वा $\frac{१}{६}$

- (२८) $y = २ वा - \frac{१}{३}$ (३४) $y = ३ वा २ \frac{२}{३}$
 (२९) $y = २६ वा - २०$ (३५) $y = ३ वा - ३$
 (३०) $y = ११ वा - १३$ (३६) $y = ८ वा - \frac{१५}{८}$
 (३१) $y = ३ वा - \frac{४}{५}$ (३७) $y = १ वा - \frac{१}{४}$
 (३२) $y = ४ वा - २ \frac{३}{४}$ (३८) $y = २ वा ४ \frac{३}{४}$
 (३३) $y = ७ वा - १ \frac{३}{४}$ (३९) $y = ८ वा १३ \frac{३३}{३२}$
 (४०) $y = २६ वा - १ \frac{१}{३}$

॥ च ग्रन्थ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
 उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- (१) $y = \pm ४$ } (२) $y = \pm ८$ } (३) $y = \pm १२$ }
 $r = \pm २$ } $r = \pm १०$ } $r = \pm ३$ }
 (४) $y = ८ वा - ३ \frac{२}{३}$ } (८) $y = ५ वा - ८ \frac{१}{४}$ }
 $r = ३ \frac{२}{३} वा - ८$ } $r = ३ वा - ५ \frac{५}{८}$ }
 (५) $y = \frac{२}{२} वा \frac{१}{४}$ } (९) $y = २ वा - २ \frac{३}{४}$ }
 $r = \frac{१}{४} वा \frac{१}{३}$ } $r = ३ वा - ५ \frac{५}{१३}$ }
 (६) $y = १ वा - १२$ } (१०) $y = ३ वा २$ }
 $r = ३ वा ११ \frac{१}{३}$ } $r = २ वा ३$ }
 (७) $y = २ वा - \frac{१}{३}$ } (११) $r = ४ वा - \frac{४}{५}$ }
 $r = ४ वा २ \frac{२}{३}$ } (१२) $y = ७ वा - \frac{७}{४३}$ }
 $r = ४ वा २ \frac{२}{३}$ } $r = ६ वा - \frac{६}{४३}$ }

॥ ९९ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उनके उत्तर लिखने हैं ॥

- (१) २२ जोर २३ (४) १४ जोर १८६ (७) ८ जोर १८
(२) ३४. ५. (५) १२ जोर १३ (८) २३
(३) ४ जोर १६ (६) २० जोर २३ (९) $\frac{३}{५}$

- (१०) १३ कोस और २२ कोस (१३) ५४ और ४८
की घटा (१४) १८ कोस और
(११) प्रति घंटा ६ कोस १२ कोस
(१२) २५ जोर २० (१५) ४ गज और ५ गज ॥

॥ १०० अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उनके उत्तर लिखने हैं ॥

- (१) $\frac{३}{५}$ (८) $\frac{५}{४८}$ (१७) २८५:५८
(२) $\frac{१}{५५}$ (९) $\frac{अ+क}{ग}$ (१८) (न-२)य:२अ
(३) $\frac{अ}{क}$ (१०) $\frac{३अ+य}{ग}$ (१९) १६. १७
(४) $\frac{अ}{२}$ (११) $\frac{१+य}{२}$ (२०) ३अ २क
(५) $\frac{अर}{२}$ (१२) $\frac{अ-क}{१}$ (२१) अ-य = अक
(६) $\frac{१क}{२अ}$ (१३) ५ जोर ४ (२२) $२ = २अय-य$
(७) $\frac{अय}{२य}$ (१४) ८ र:२य (२३) ६:२
(८) $\frac{अय}{२य}$ (१५) ७ अ:३क (२४) ४ जोर ६
(९) $\frac{अय}{२य}$ (१६) ८ र:२य (२५) २ कर
(१०) $\frac{अय}{२य}$ (१७) ८ र:२य (२६) १५ जोर २०
(११) $\frac{अय}{२य}$ (१८) ८ र:२य (२७) ८ र:२अय
(१२) $\frac{अय}{२य}$ (१९) ८ र:२य (२८) $८ = \frac{५}{५}$

॥ २२ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखे हैं
उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (१) २१ और ८६ | (१३) ७८ |
| (२) ३५ और -३ | (१४) ५२००० राज |
| (३) $२\frac{२}{३}$ और $६\frac{२}{३}$ | (१५) $१\frac{२}{३}$ और $\frac{३}{४}$ |
| (४) ४०० | (१६) $\frac{१३}{७२}$ और $\frac{२}{५}$ |
| (५) ६७० | (१७) $१\frac{२}{३}$ २. २ $\frac{२}{३}$ |
| (६) ३८०० | (१८) ८६, ८४, ८८, ८४ |
| (७) १५३८ | (१९) २०, ८०, |
| (८) - ४६० | (२०) ४०, १६, ६ $\frac{१}{५}$ |
| (९) $५७\frac{१}{२}$ | (२१) १०० अठनारे और ५६३ |
| (१०) १८६ $\frac{३}{४}$ | (२२) १६ |
| (११) ६३ ॥ ३ ॥ $\frac{२}{४}$ पाई | (२३) १५ गुला |
| (१२) ५६ ॥ ३ ॥ | (२४) ६६०० फुलवार $\frac{१}{४}$ पील |

॥ मिश्र प्रश्न जो लिखे हैं उन के उत्तर लिखते हैं ॥

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| (१) - र य | (११) न |
| (२) (क-२) ये | (१२) ५ य |
| (३) (३ अ-य-१) य | (१३) य |
| (४) नहीं | (१४) $\frac{३}{२}$ अ + २ अंक + २ क |
| (५) हां | (१५) य - २ य + य |
| (६) $\frac{३ अ + २}{१}$ | (१६) $\frac{अ}{क}$ |
| (७) अ + क + ग - घ | (१७) $\frac{३ अ + २ क}{२ क - २ अ}$ |
| (८) २ क य + २ क र | (१८) य + $\frac{१}{२}$ य + १ |
| (९) $\frac{१ य - अ}{२ क}$ | (१९) $\frac{३}{अ} + \frac{२}{अ}$ |
| (१०) $\frac{५ - अ}{५ - २}$ | (२०) $\frac{३}{४} + \frac{अ}{५} - २$ |

(२२) $y = -\frac{1}{2}$

(२२) $y = \frac{1}{2}$

(२३) $\frac{4y + 4}{4y - 4}$

(२४) $\frac{y(y+2)}{2}$

(२५) $y = 8$

(२६) $y = 22$

(२७) $y = 8$

(२८) $y = 3\frac{3}{4}$

(२९) $y = -\frac{3}{4}$

(३०) $y = \frac{2}{3}$

(३१) $y = -8\frac{2}{3}$

(३२) $y = 1\frac{2}{3}$

(३३) $y = 1\frac{13}{22}$

(३४) $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$

(३५) $y = 2\frac{1}{2}$

(३६) $y = 2\frac{1}{2}$

(३७) $y = 2\frac{1}{2}$

(३८) $y = 2\frac{1}{2}$

(३९) $y = 8\frac{1}{2}$

(४०) $y = 5\frac{1}{2}$

(४१) $y = \frac{3}{4}$

(४२) $y = 2\frac{1}{2}$

(४३) $y = 8$
 $r = 2$

(४४) $y = 8$
 $r = 3$

(४५) $y = 131$
 $r = 31$

(४६) $y = 11$
 $r = 8$

(४७) $y = 5$
 $r = 8\frac{1}{2}$

(४८) $y = 11$
 $r = 18$

(४९) $y = 1$
 $r = 12$

(५०) $y = 22$
 $r = 12$

(५१) $y = \pm 3$
 $r = 3\frac{1}{2}$

(५२) ३५ हाथ

(५३) ७५००

(५४) २२, १८, ५०

(५५) २२

(५६) पहला मनुष्य १) रोज
दूसरा मनुष्य २) रोज

(५७) ३२०

(५८) १८, ३८, ६२

(५९) ईसंगतरे और दसीदि

(६०) ४ मान

(६१) $\frac{n^2}{n+1}$ और $\frac{n}{n+1}$

(६२) ३२ आने वा ३
और १४ मनुष्य

(६३) ३००

- (२१०) और दलइके (७४) २१२ सेर चांदी }
 (६५) ३६६०० फुट वा १३३०० } और ३६ सेर तांबा }
 गज वा ७ १/२ मील और १०० गज } (७७) य = $\frac{अ - क}{४३३ - क}$
 (६६) ३५५ (७८) ४, १०, ६
 (६७) ४७ (७९) २७, ४८
 (६८) ७०, ५२, ४० (८०) १, ८
 (६९) १६ (८१) ३, ३१, ३७ अंगुल
 (७०) ५२ और ४८ (८२) १, २
 (७१) ३ और ५ (८३) ७२८१॥ ५ १/२ पाई
 (७२) २ दिन पीछे भेंट हुई } (८४) १२३, ६८, १६, ४३
 और नवें दिन दोनों १७ कोस चले } (८५) ८, २४ अंगुल
 (७३) १५, २१, २४ (८६) ६३ वर्ष जन्म सं. १८५४

॥ इति ॥

लिखितं नागर ब्राह्मण
 सु क देव